

# Markovljev model za kanale s Nakagami fedingom

Milena Stojnić, Elektrotehnički fakultet, Beograd

**Sadržaj** — U ovom radu predložen je metod za određivanje parametara Markovljevog modela kojima se mogu opisati bežični kanali u kojima deluje Nakagami- $m$  feding. Analitički izrazi za statističke parametre Nakagami fedinga verifikovani su simulacijom, a zatim su pomoću njih izvedeni parametri odgovarajućeg Markovljevog modela. Monte Karlo simulacijom je određena verovatnoća greške po paketu i srednja dužina paketa grešaka u jednom sistemu paketskog tipa, u kome je primenjena BPSK modulacija. Svi rezultati su dati za različite vrednosti parametra  $m$  Nakagami fedinga.

**Ključne reči** — Markovljev model, Nakagami- $m$  feding, srednja dužina paketa grešaka.

## I. UVOD

PERFORMANSE digitalnih telekomunikacionih sistema obično se izražavaju preko verovatnoće greške po bitu (*Bit Error Rate – BER*). Kako je ova veličina dobijena usrednjavanjem na veoma dugom vremenskom intervalu, ona u potpunosti ne opisuje dinamičke karakteristike fedinga koji deluje u bežičnom kanalu. Poznato je da se karakteristike proizvoljnog vremenski promenljivog signala uspešno mogu predstaviti preko Markovljevog modela kanala sa konačnim brojem stanja (*Finite State Markov Channel Model – FSMC*) [1], [2]. Ovaj pristup se zasniva na predstavi nepreklapajućih intervala odnosa signal-šum, stanjima Markovljevog modela prvog reda [1], [3]. Ukoliko se u model uključe još modulator i demodulator [4], može se formirati Markovljev model sistema zasnovanog na paketskom prenosu. U radu [5] razmatrana je mogućnost opisa kanala s Nakagami- $m$  fedingom pomoću Markovljevog model sa dva stanja.

U ovom radu formiran je Markovljev model sa većim brojem stanja, i to na osnovu principa jednakog trajanja intervala odnosa signal-šum [4]. Preciznost dobijenog modela proverena je simulacijom zasnovanom na modelu Nakagami- $m$  fedinga datom u članku [6]. Određene su granične vrednosti odnosa signal-šum koje odgovaraju pojedinim stanjima *FSMC* modela, a koristeći simulacioni model fedinga proverena je preciznost prethodno izračunatih stacionarnih i tranzicionih verovatnoća.

Zatim je opisan proces uspešnosti prenosa paketa kroz kanal s Nakagami fedingom. Na osnovu razvijenog modela određena je verovatnoća greške po paketu (*Packet Error Rate – PER*) kao i zavisnost prosečne dužine paketa grešaka od *PER*. Na taj način su rezultati iz [7] prošireni na kanale s Nakagami fedingom i potvrđeni simulacijom.

## II. NAKAGAMI- $m$ FEDING

U cilju formiranja *FSMC* za kanale s Nakagami- $m$  fedingom u nastavku će biti dat pregled parametara Nakagami- $m$  raspodele.

### A. Nakagami- $m$ raspodela

Funkcija gustine verovatnoće anvelope  $r$  kod Nakagami fedinga, označena sa  $p(r)$ , data je relacijom

$$p(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \quad (1)$$

gde je

$$m = E^2[r^2] / \text{var}(r^2), \quad \Omega = E[r^2]$$

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} \exp(-x) dx.$$

Kada je parametar  $m = 1$ , funkcija gustine verovatnoće anvelope je Rejljeva.

U daljoj analizi će biti posmatran trenutni odnos signal-šum (*Signal-to-Noise Ratio – SNR*) na strani prijema, označen sa  $\gamma$ . Varijacije ove veličine određene su kvadratom anvelope fedinga, pa se može pisati

$$\gamma = r^2 \gamma_0, \quad (2)$$

gde je sa  $\gamma_0$  određen prosečni odnos signal šum u kanalu. Funkcija gustine verovatnoće za trenutni SNR na prijemu tada postaje

$$p(\gamma) = \left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m \frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m\gamma}{\gamma_0}\right). \quad (3)$$

### B. Model Nakagami- $m$ fedinga

Model Nakagami- $m$  fedinga biće formiran na osnovu objašnjenja datih u članku [6].

Neka su  $x_i(t)$  i  $y_i(t)$  slučajni Gausovi procesi koji odgovaraju komponentama u fazi i u kvadraturi uskopojasnog signala, respektivno.

$$x_i(t) = \sqrt{2}\sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (4)$$

$$y_i(t) = \sqrt{2}\sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\omega_j t - \phi_j) \quad (5)$$

U jednačinama (4) i (5),  $\sqrt{2}\sigma a_{ij}$  je amplituda a  $a_{ij}$  je tako izabrano da je srednja vrednost ansambla  $\langle \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \rangle = 1$  dok je  $\phi_j$  slučajna vrednost faze uniformno raspodeljena na intervalu od 0 do  $2\pi$ , a  $\omega_j = (2\pi v / \lambda) \cos(\varphi_j)$  Doplerov pomeraj pri čemu je  $v$  brzina kretanja posmatranog uređaja a  $\varphi_j$  ugao pod kojim dolaze talasi.

U prethodno datim jednačinama  $N$  predstavlja broj sinusoidalnih talasa, koji bi trebalo da bude dovoljno veliki da bi se (kao posledica centralne granične teoreme)  $x_i(t)$  i  $y_i(t)$  mogli smatrati Gausovim procesima. Neka se sa  $x_i$  i  $y_i$  označe promenljive koje odgovaraju Gausovim procesima  $x_i(t)$  i  $y_i(t)$ , respektivno, za određeni fiksirani vremenski trenutak  $t$ . Primećuje se da je  $E[x_i] = E[y_i] = 0$  i da je  $E[x_i^2] = E[y_i^2] = \sigma^2$ .

Neka je sada  $r_0^2 = x_0^2$  (ili ekvivalentno  $r_0^2 = y_0^2$ ) a  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ , gde je  $i=1, 2, \dots$ . Uočava se da je  $r_i$  promenljiva sa Rejljevom raspodelom.

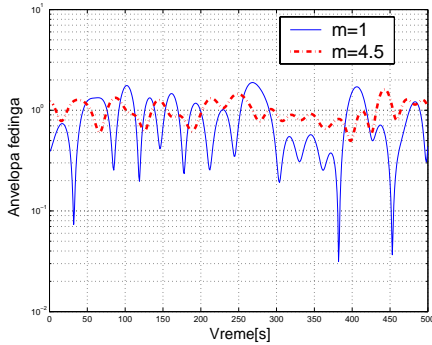
U članku [6] je pokazano kako se model fedinga anvelope  $r$  definisane relacijama

$$r^2 = r_0^2 + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} r_i^2, \text{ za } n \text{ neparno} \quad (6a)$$

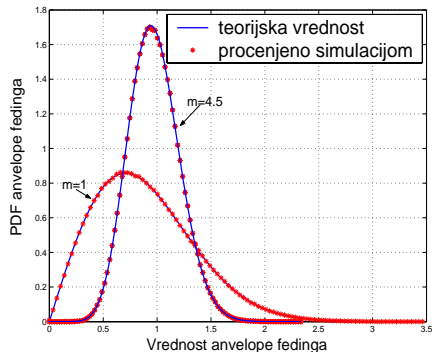
$$r^2 = \sum_{i=1}^{n/2} r_i^2, \text{ za } n \text{ parno} \quad (6b)$$

veoma precizno poklapa sa Nakagami- $m$  raspodelom. Opisani model predlaže da se snaga Nakagami- $m$  signala izjednači sa sumom  $n=2m$  Gausovih signala gde je  $n$  ceo broj veći od nule, kao što je pokazano u (6). Ovakav model uključuje i slučaj Rejljeve raspodele kada je  $m=1$ .

Simulaciona analiza je urađena na osnovu prethodno opisanog modela pri čemu je za prikazivanje promenljive  $r_i$  korišćen Dzejksov model predožen u [8]. Anvelopa Nakagami- $m$  fedinga dobijena metodom simulacije za različite vrednosti  $m$  prikazana je na Sl.1 dok je na Sl.2 potvrđena ispravnost korišćene metode upoređujući teorijske sa rezultatima modeliranja za funkciju gustine verovatnoće anvelope fedinga.



Sl. 1 Anvelopa Nakagami- $m$  fedinga,  $f_m = 20\text{Hz}$



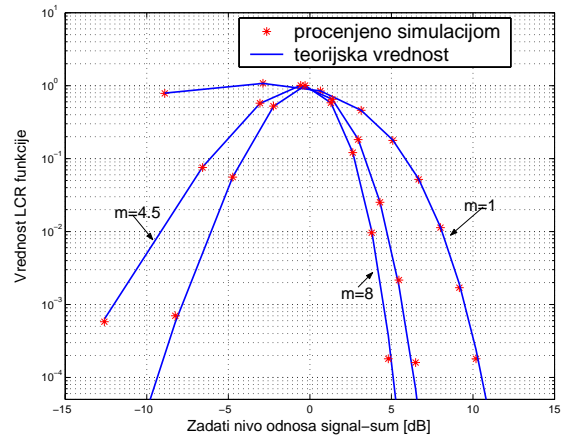
Sl. 2 Funkcija gustine verovatnoće anvelope

Poznato je da se za opis dinamičkih parametara fedinga često koristi funkcija učestanosti preseka nivoa (*Level Crossing Rate LCR*) [4], [8]. U slučaju Nakagami- $m$  fedinga ova veličina data je izrazom

$$N(\Gamma) = \sqrt{2\pi} f_m \frac{m^{m-0.5}}{\Gamma(m)} \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma_0}}^{-2m-1} \exp\left(-\frac{m\Gamma}{\gamma_0}\right) \quad (7)$$

gde je  $f_m$  maksimalna Doplerova učestanost a  $\Gamma$  odnos signal-šum na strani prijema.

Na Sl.3 upoređeni su numerički rezultati dobijeni na osnovu (7) i rezultati dobijeni simulacijom *LCR* funkcije pri čemu je korišćen prethodno opisani model Nakagami- $m$  fedinga. Može se uočiti da je poklapanje rezultata i u ovom slučaju veoma dobro što potvrđuje ispravnost korišćenog simulacionog. Stoga će on u daljem radu služiti za proveru dobijenih rezultata.



Sl.3 Učestanost preseka nivoa odnosa signal-šum, teorijska vrednost i simulacije,  $f_m = 20\text{Hz}$

### III. ODREĐIVANJE PARAMETARA FSMC MODELA

U ovom poglavlju će biti predložen postupak za određivanje parametara *FSMC* modela koji odgovara kanalu sa Nakagami- $m$  fedingom, za proizvoljnu vrednost parametra  $m$ . Postupak se zasniva na ideji opisanoj u [4], i počinje podelom opsega primljenog odnosa signal-šum po principu jednakog trajanja pojedinih stanja.

Neka je  $\vec{\Gamma} = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{K+1}]^T$  matrica graničnih vrednosti *SNR* pojedinih stanja modela data u rastućem redosledu gde je  $\Gamma_1 = 0$  a  $\Gamma_{K+1} = \infty$ . Kanal je u stanju  $k$  ako je *SNR* između  $\Gamma_k$  i  $\Gamma_{k+1}$ . Kod paketskog sistema prenosa se smatra da prelaz u naredno stanje modela dešava posle perioda emitovanja jednog paketa  $T_p$ . Za primljeni paket se kaže da je u stanju kanala  $k$  ako vrednost odnosa signal-šum tog paketa pripada opsegu  $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1})$ . U *FSMC* modelu se smatra da su prelazi iz datog stanja dozvoljeni samo u dva susedna stanja.

Opseg odnosa signal-šum koji određuje jedno stanje modela treba da bude dovoljno veliki da pokrije varijacije signala tokom trajanja jednog paketa. S druge strane opseg pojedinih stanja ne može biti suviše veliki jer bi u suprotnom vreme trajanja stanja raslo što bi prouzrokovalo

da paketi koji pripadaju istom stanju imaju bitno različitu verovatnoću greške po bitu.

Vidi se da je srednje vreme trajanja pojedinih stanja kritičan parametar za formiranje ovakvog modela. Ako se sa  $\bar{\tau}_k$  označi srednje vreme trajanja intervala  $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1})$  na osnovu [4] dobija se

$$\bar{\tau}_k = \frac{\pi_k}{N(\Gamma_k) + N(\Gamma_{k+1})}, \quad (8)$$

gde je sa  $N(\Gamma)$  označena LCR funkcija opisana u (7). Pritom je sa  $\pi_k$  označena stacionarna verovatnoća greške u stanju  $k$ , odnosno verovatnoća da se sistem nađe u tom stanju, data relacijom

$$\pi_k = \int_{\Gamma_k}^{\Gamma_{k+1}} p(\gamma) d\gamma = I\left(\frac{\Gamma_{k+1}m}{\gamma_0}, m\right) - I\left(\frac{\Gamma_k m}{\gamma_0}, m\right), \quad (9)$$

gde je sa  $I(x, m)$  označena nepotpuna gama funkcija

$$I(x, m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x t^{m-1} \exp(-t) dt, \quad (10)$$

a  $m$  red Nakagami- $m$  fedinga. Neka se zahteva da je

$$\bar{\tau}_k = c_k T_p, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (11)$$

To znači da je srednje vreme trajanja pojedinih stanja modela jednako umnošku dužine trajanja paketa. Na osnovu (8)-(11) se može napisati

$$c_k = \frac{I\left(\frac{\Gamma_{k+1}m}{\gamma_0}, m\right) - I\left(\frac{\Gamma_k m}{\gamma_0}, m\right)}{N(\Gamma_k) + N(\Gamma_{k+1})} \cdot \frac{1}{f_m T_p}, \quad (12)$$

gde je  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Ako se uzme da je vrednost  $c_k = c$  konstantna dobija se sistem od  $K$  jednačina sa  $K-1$  nepoznatom granicom stanja  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_K$  i nepoznatom vrednosti  $c$ . Broj stanja se može redukovati ako se usvoji da postoji samo jedno stanje iznad granične vrednosti odnosa signal-šum određene sa

$$P(\gamma > \Gamma_t) = 1 - I\left(\frac{\Gamma_t m}{\gamma_0}, m\right) = e \quad (13)$$

a  $e$  je mali broj.

U radu je uzeto da je  $e=10^{-3}$ ,  $f_m = 8.7963$ ,  $T_p = 3.84$  ms, dužina paketa  $l=384$  bita, a srednja vrednost SNR 15dB. Određene su granice stanja za različite vrednosti parametra  $m$  kao i verovatnoća greške po paketu u svakom stanju na osnovu

$$\varepsilon_k = \frac{\int_{\Gamma_k}^{\Gamma_{k+1}} (1 - (1 - P_e(\gamma))^l) p(\gamma) d\gamma}{\pi_k}, \quad (14)$$

kada je primenjena BPSK modulacija za koju je verovatnoće greške po bitu

$$P_e(\gamma) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}), \quad (15)$$

gde je  $\operatorname{erfc}$  komplementarna funkcija greške. Rezultati navedenog postupka dati su u Tabeli 1.

Primećuje se da povećanjem  $m$  dolazi do povećanja broja stanja FSMC modela, a PER se smanjuje jer signal fedinga u kanalu ima manje izražene vršne vrednosti.

TABELA 1: GRANICE SNR STANJA FSMC MODELA I PER POJEDINIH STANJA ZA RAZLIČITE VREDNOSTI  $m$

Redni broj stanja	$m=1$		$m=4.5$		$m=9$	
	$\Gamma_k / \gamma_0$	$\varepsilon_k$	$\Gamma_k / \gamma_0$	$\varepsilon_k$	$\Gamma_k / \gamma_0$	$\varepsilon_k$
1	$-\infty$	1	$-\infty$	3.76e-2	$-\infty$	1.31e-2
2	-12.04	0.75	-6.62	1.76e-3	-6.02	6.07e-4
3	-6.01	1.43e-3	-4.39	2.65e-5	-4.18	1.87e-5
4	-2.47	3.54e-8	-2.74	1.83e-7	-2.92	4.80e-7
5	0.04	-	-1.39	5.6e-10	-1.89	9.08e-9
6	2.02	-	-0.23	-	-1.00	1.21e-10
7	3.65	-	0.79	-	-0.20	-
8	5.04	-	1.73	-	0.53	-
9	6.27	-	2.59	-	1.22	-
10	7.37	-	3.39	-	1.87	-
11	8.39	-	4.16	-	2.49	-
12	$\infty$	-	4.91	-	3.10	-
13			$\infty$	-	3.71	-
14					$\infty$	-

#### IV. NUMERIČKI REZULTATI

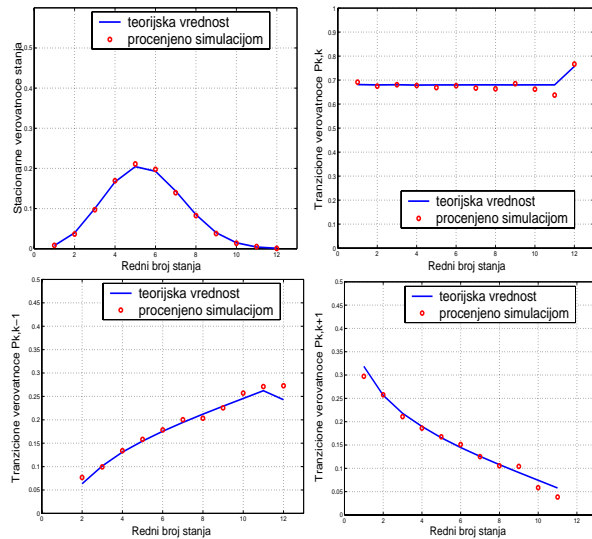
##### A. Stacionarne i tranzicione verovatnoće stanja

Kada su određene granice pojedinih stanja Markovljevog modela, moguće je odrediti stacionarne i tranzicione verovatnoće stanja. Stacionarne verovatnoće su opisane u (9) dok se tranzicione verovatnoće računaju prema [4] pomoću sledećih jednačina.

$$P_{k,k+1} \approx \frac{N(\Gamma_{k+1})T_p}{\pi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \quad (16)$$

$$P_{k,k-1} \approx \frac{N(\Gamma_k)T_p}{\pi_k}, \quad k = 2, \dots, K. \quad (17)$$

Izvršeno je upoređivanje vrednosti navedenih verovatnoća izračunatih teorijskim putem pomoću (7), (9), (16) i (17) i simulacionom metodom. Dobijeni rezultati su prikazani na Sl.4 i pokazano je da je slaganje rezultata dobijenih pomoću dva nezavisna pristupa izuzetno dobro.

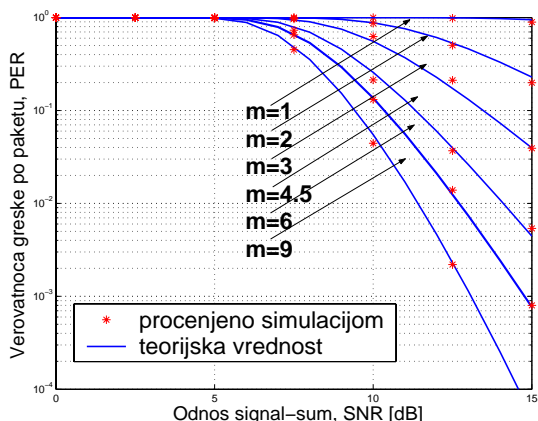


Sl.4 Stacionarne i tranzicione verovatnoće stanja dobijene teorijskim putem i simulacionom metodom,  $f_m = 8.79$  Hz

### B. Monte Karlo simulacija paketskog sistema

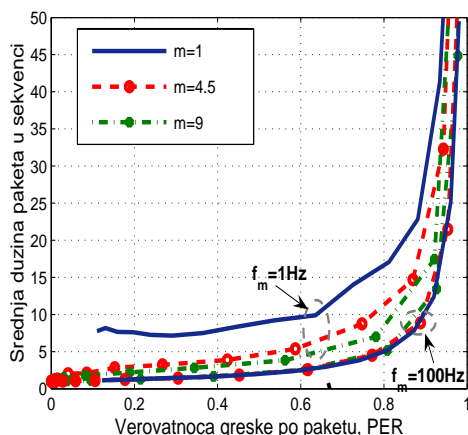
Da bi se opisala primena razvijenog FSMC modela, u ovom delu rada formiran je Monte Karlo simulacioni model telekomunikacionog sistema koji uključuje kanal sa šumom i Nakagami- $m$  modelom fedinga, BPSK modulator i demodulator. Simulacijom će biti određeni verovatnoća greške po paketu i srednja dužina paketa grešaka u zavisnosti od vrednosti parametra  $m$ .

Generisana povorka dužine  $N_0=5000$  bita se mapira u BPSK simbole, a zatim množi odbircima fedinga i sabira sa odbircima Gausovog šuma. Za generisanje odbiraka fedinga koristi se prethodno opisani simulacioni model Nakagami fedinga. Nakon izlaska iz demodulatora binarni simboli se dovode u sklop u kome se vrši odlučivanje po principu maksimalne verodostojnosti. Verovatnoća greške po bitu se računa kao odnos broja pogrešno prenetih i broja ukupno poslanih binarnih simbola. Paket je pogrešno primljen ako je bar jedan bit u njemu pogrešno prenet. Odnos broja pogrešno primljenih paketa i broja ukupno poslanih paketa predstavlja verovatnoću greške po paketu. Na Sl.5 dati su rezultati urađene simulacije.



Sl.5 Verovatnoća greške po paketu,  $PER$

Uočava se da sa porastom  $m$  opada  $PER$  što je logična posledica činjenice da signal fedinga ima sve manje izražene pikove što dovodi do toga da je manje vremena signal na prijemu slabog kvaliteta pa je verovatnoća greške po bitu a samim tim i po paketu manja.



Sl.6 Zavisnost srednje dužine paketa grešaka od verovatnoće greške po paketu

Srednja dužina paketa grešaka opisuje način grupisanja grešaka na sekvenci poslanih paketa. Na njenu vrednost utiču  $PER$ , maksimalna Doplerova frekvencija i parametar  $m$  što je pokazano na Sl.6.

Sa smanjenjem verovatnoće greške po paketu srednja dužina paketa grešaka se smanjuje jer se smanjuje i ukupni broj pogrešno prenetih paketa. Ako se povećava maksimalna Doplerova učestanost odnos signal-šum na strani prijema je češće ispod definisane granice kvaliteta što uslovljava češće pojavljivanje paketa grešaka kraćeg trajanja. Pri konstantnoj vrednosti za  $PER$  i maksimalnu Doplerovu učestanost porastom parametra  $m$  smanjuje se vrednost dužine niza paketa grešaka.

### V. ZAKLJUČAK

U radu je originalno razvijen Markovljev model sa konačnim brojem stanja za kanale sa Nakagami fedingom. Parametri modela su određeni na osnovu postojećih izraza za statičke i dinamičke parametre Nakagami- $m$  fedinga, koji su u ovom radu potvrđeni simulacionom analizom. Izvedeni su izrazi u zatvorenoj formi za stacionarne i tranzicione verovatnoće FSMC modela. Prikazana je promena  $PER$  u funkciji od  $m$  kao i zavisnost srednje dužine paketa grešaka od verovatnoće greške po paketu.

### LITERATURA

- [1] H. S. Wang, N. Moayeri, "Finite-state Markov channel – A useful model for radio communication channels," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 44, pp. 163-171, February 1995.
- [2] C. Pimentel, T. H. Falk, L. Lisboa, "Finite-State Markov Modeling of Correlated Rician Fading Channels," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 53, pp. 1491-1501, September 2004.
- [3] H. Wang, P. Chang, "On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 45, pp. 353-357, February 1996.
- [4] Q. Zhang, S. A. Kassam, "Finite-State Markov Model for Rayleigh Fading Channels," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 47, pp. 1688-1692, November 1999.
- [5] A. Ramesh, A. Chockalingam, L. B. Milstein, "A First-Order Markov Model for Correlated Nakagami- $m$  Fading Channels", in *Proc. IEEE ICC, 2002*, pp. 3413 - 3417, April 2002.
- [6] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, L. G. R. Guedes, "On Higher Order Statistics of the Nakagami- $m$  Distribution," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 48, pp. 790-794, May 1999.
- [7] M. Zorzi, R. R. Rao, "On the Statistics of Block Errors in Bursty Channels," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 45, pp. 660-667, June 1997.
- [8] W.C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, 2<sup>nd</sup> ed., IEEE Press, New York, 1993.

### ABSTRACT

In this paper an overview of the first and second order statistics of the Nakagami- $m$  fading is given and verified by simulation. The parameters of the corresponding Markov model are originally derived, using the SNR partition method based on equal-state duration. The  $PER$  and average length of packet errors burst are determined numerically and verified using Monte Carlo simulation method. All results are given for different values of parameter  $m$  in Nakagami- $m$  fading.

### Markov Model for Nakagami Fading Channels

Milena Stojnić, School of Electrical Engineering,  
University of Belgrade