

Modelovanje elementima višeg reda u numeričkoj elektromagnetici

Miroslav Djordjević, *Member, IEEE*, Milan M. Ilić, *Member, IEEE*,
i Branislav M. Notaroš, *Senior Member, IEEE*

Sadržaj — U radu je opisano modelovanje elektromagnetskih sistema elementima (površinama i zapreminama) višeg reda u okviru metode momenata (MoM), metode konačnih elemenata (FEM) i hibrida metode momenata i fizičke optike (MoM-PO). Primeri u radu predstavljaju rezultate iz doktorskih teza prva dva autora koje su odbranili na University of Massachusetts Dartmouth, USA.

Ključne reči — Fizička optika, Hibridne metode, Metod konačnih elemenata, Metod momenata.

I. UVOD

MODERNE telekomunikacije stavljaju pred elektroiženjere koji se bave elektromagnetikom brojne probleme. Zbog brzog razvoja digitalne elektronike koji je omogućio redukovanje dimenzija uređaja, očekuje se i smanjivanje antena, bolje prilagođenje na napojni vod (zbog produženog trajanja baterija), sa pri tome očuvanim karakteristikama zračenja, jednostavnom izradom i niskom cenom. U vojnim komunikacijama, antene postaju lakše, rasklopive i prenosive, i projektuju se za sve šire opsege. Miniturizacija filtara zahteva primenu modernih tehnologija, uključujući i metamaterijale.

Da bi odgovorili novim zahtevima i brzom tempu produkcije, inženjeri moraju da koriste numeričke alate za analizu elektromagnetskih sklopova koji daju precizne rezultate i omogućavaju optimizaciju i ubrzavaju fazu inicijalnog dizajna.

Klasične numeričke metode i trenutno dostupni komercijalni elektromagnetski simulatori (uz retke izuzetke) bazirane su na aproksimaciji geometrije strukture malim elementima (stranice reda veličine oko $\lambda/10$) niskog reda (najčešće trouglovima). Nepoznate (struje ili polja) opisuju se funkcijama bazisa koje su konstantne ili linearne u okviru elementa. Posledica ovakvog pristupa modelovanju je veliki broj nepoznatih koji je neophodan za postizanje rezultata inženjerske

preciznosti, a samim tim i neophodnost značajnih računarskih resursa (prevashodno memorije), kao i sporost simulacije.

Jednu od prvih *generalnih* metoda za analizu žičanih antena koja je upotrebljavala električno velike (reda veličine oko 0.5λ) elemente za predstavljanje geometrije i polinomsku aproksimaciju struje po žicama predstavio je Popović sa Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu [1]. Kasniji razvoj metoda za analizu žičanih antena omogućio je upotrebu elemenata dužine do 2λ i veoma visoki red polinomske aproksimacije struje [2]. Ubrzani razvoj računara omogućio je analizu sve kompleksnijih problema i Kolundžija i Popović su predstavili metodu za elektromagnetsku analizu sistema sa metalnim žicama i površima [3]. Za modelovanje geometrije u [3] koriste se pravi linijski segmenti i bilinearne površi (definisane sa četiri tačke proizvoljno raspoređene u prostoru). Nepoznate struje su aproksimirane jednodimenzionim (po žicama) i dvodimenzionim (po površima) polinomima visokog reda. Ekstenziju metode [3], kojom se omogućava i analiza dielektričnih tela, predstavili su Notaroš i Popović [4]. Dielektrici u [4] se modeluju trilinearnim heksaedrima, a zapreminska gustina struje je aproksimirana trodimenzionim polinomima lokalnih parametarskih koordinata. Daljim razvojem metode [3], korišćenjem teoreme ekvivalencije, omogućena je analiza i dielektričnih struktura [5]. Popularni komercijalni paket WIPL-D baziran je na ovoj metodi.

Metode predstavljene u radovima [1]-[5] imaju prednost nad klasičnim poddomenskim metodama, koje aproksimiraju nepoznate struje i polja konstantnim ili linearnim funkcijama, u tome što je broj nepoznatih (koeficijenata u razvoju struje ili polja) manji 5-10 puta, što dalje dovodi do ubrzavanja rešavanja rezultujućeg sistema jednačina od nekoliko redova veličine. Nažalost, ovakve prednosti elektromagnetskih metoda sa polinomskom aproksimacijom struje su ostvarive samo u slučaju da se analizira sistem u čijem se geometrijskom modelu koriste elementi većih dimenzija. Ukoliko geometrijski model sadrži male elemente, zbog preciznog modelovanja detalja strukture ili zakrivljenosti nekih površina, prednosti metoda [1]-[5] se gube. Da bi se precizno modelovali zakrivljeni delovi strukture, a u isto vreme u potpunosti iskoristile prednosti koje nosi modelovanje struja i polja polinomima višeg reda, neophodno je kao osnovni geometrijski element koristiti (zakrivljene) žice, površi i zapremine višeg reda.

Istraživanje prikazano u ovom radu potpomognuto je od američke Nacionalne fondacije za nauku (NSF), u okviru projekata ECS- 0115756 i ECS-0324345.

Miroslav Djordjevic, Visoka škola strukovnih studija za informacione i komunikacione tehnologije, Zdravka Čelara 16, 11000 Beograd, Srbija (telefon 381-11-3291-220, e-mail: miroslav@ieee.org).

Milan M. Ilic, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Srbija, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11120 Beograd, Srbija; (e-mail: milan.ilic@etf.rs).

Branislav M. Notaroš, Colorado State University, Fort Collins, CO, USA; (e-mail: bnotaros@colostate.edu).

U delu II opisana je metoda momenata bazirana na modelovanju geometrije strukture četvorouglovima višeg reda, u kombinaciji sa polinomskom aproksimacijom struje po površi elementa. U delu III opisana je metoda konačnih elemenata bazirana na modelovanju geometrije zakrivljenim heksaedrima višeg reda, uz polinomsku aproksimaciju polja. U delu IV opisana je hibridizacija metode momenata višeg reda (iz dela II) sa tehnikom fizičke optike.

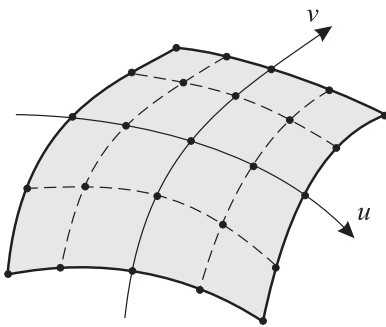
II. METOD MOMENATA

Osnovni geometrijski element korišćen u metodi momenata (MoM) višeg reda [6] je zakrivljeni parametarski četvorougao, prikazan na Sl. 1. i definisan kao

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m p_m(u, v) = \sum_{i=0}^{K_u} \sum_{j=0}^{K_v} \mathbf{r}_{ij} u^i v^j, \quad (1)$$

$$-1 \leq u, v \leq 1$$

gde su \mathbf{r}_m vektori položaja interpolacionih tačaka, $p_m(u, v)$ su Lagrange-ovi interpolacioni polinomi, u i v lokalne parametarske koordinate, i \mathbf{r}_{ij} konstantni vektori koji zavise od $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M$.



Sl. 1. Četvorougao višeg reda sa interpolacionim tačkama

Nepoznate struje po površima četvorougla aproksimiraju se pomoću

$$\mathbf{J}_S(u, v) = \frac{1}{W(u, v)} \left(\sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \alpha_{uij} f_{uij}(u, v) \mathbf{a}_u(u, v) + \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \alpha_{vij} f_{vij}(u, v) \mathbf{a}_v(u, v) \right), \quad (2)$$

gde je

$$W(u, v) = |\mathbf{a}_u(u, v) \times \mathbf{a}_v(u, v)|, \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{a}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$$

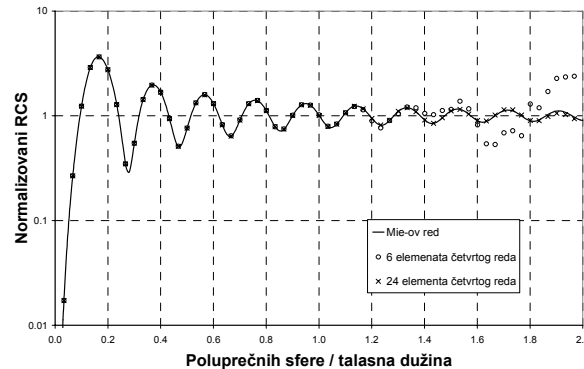
Funkcije $f_{uij}(u, v)$ odabrane su tako da zadovoljavaju granične uslove

$$f_{uij}(u, v) = \left\{ \begin{array}{ll} u+1, & i=0 \\ u-1, & i=1 \\ u^i-1, & i \geq 2, \text{ parno} \\ u^i-u, & i \geq 3, \text{ neparno} \end{array} \right\} v^j \quad (4)$$

Identične funkcije upotrebljene su i za razvoj u red nepoznatih struja i za testiranje integralne jednačine električnog polja, što predstavlja Galerkinovu varijantu

metode momenata.

Sferični rasejač je modelovan koristeći 6 i 24 četvorougla četvrtog reda ($K_u = K_v = 4$) i osmi i šesti red aproksimacije struje, respektivno. Broj nepoznatih potreban za analizu iznosio je 768 i 1728, bez korišćenja simetrije. Sl. 2. prikazuje rezultate simulacija u poređenju sa analitičkim rešenjem. Možemo videti da upotrebom modela sa šest četvorouglova dolazimo do preciznih rezultata do frekvencije za koju je $a/\lambda = 1.1$ (stranica četvorougla je otprilike 1.35λ dugačka). Korišćenjem 24 geometrijska elementa slaganje sa teorijskim rezultatima je odlično u čitavom opsegu koji je analiziran.



Sl. 2. Radarski poprečni presek sfere dobijen metodom momenata višeg reda

III. METOD KONAČNIH ELEMENATA

Osnovni element korišćen u metodi konačnih elemenata višeg reda [7] je generalizovani heksaedar definisan sa

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{i=1}^M \mathbf{r}_i \hat{L}_i^{K_{uvw}}(u, v, w) = \sum_{m=0}^{K_u} \sum_{n=0}^{K_v} \sum_{l=0}^{K_w} \mathbf{r}_{mnl} u^m v^n w^l, \quad (5)$$

$$-1 \leq u, v, w \leq 1, M = (K_u + 1)(K_v + 1)(K_w + 1)$$

gde je $\hat{L}_i^K(u, v, w)$ trodimenzioni Lagrange-ov polinom dobijen kao proizvod odgovarajućih jednodimenzionih polinoma sa uniformno raspoređenim interpolacionim čvorovima na segmentu $-1 \leq u, v, w \leq 1$.

Električna polja unutar heksaedara aproksimirana su kao

$$\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{uijk} \mathbf{f}_{uijk} + \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{vijk} \mathbf{f}_{vijk} + \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} \sum_{k=0}^{N_w-1} \alpha_{wijk} \mathbf{f}_{wijk}, \quad (6)$$

gde je u -komponenta definisana sa

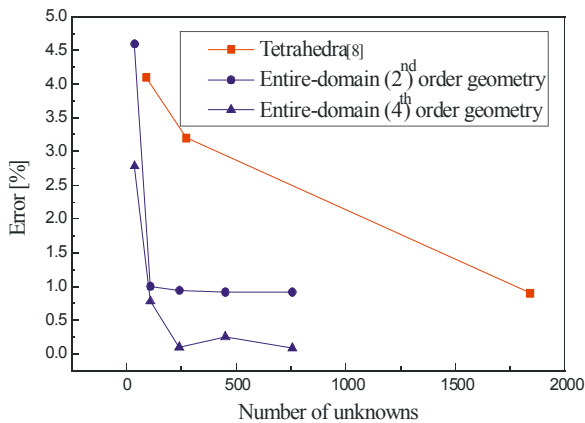
$$\mathbf{f}_{uijk} = u^i P_j(v) P_k(w) \mathbf{a}'_u \quad (7)$$

i

$$P_i(u) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-u, & i=0 \\ u+1, & i=1 \\ u^i-1, & i \geq 2, \text{ parno} \\ u^i-u, & i \geq 3, \text{ neparno} \end{array} \right. \quad (8)$$

Ostale komponente polja (v , w) definisane su analogno sa (7) i (8).

Sferični rezonator je modelovan koristeći jedan geometrijski element drugog, odnosno četvrtog reda i simulacije upoređene sa prethodno publikovanim rezultatima [8]. Slika 3. prikazuje relativnu grešku u izračunavanju dominantnog moda u slučaju modelovanja malim tetrahedronima (poddomenska aproksimacija) i heksahedronima višeg reda (celodomenska aproksimacija). Celodomenska aproksimacija (u oba slučaja) postiže grešku od 1% koristeći četvrti red aproksimacije električnog polja, sa samo 108 nepoznatih. Poddomenska aproksimacija postiže istu tačnost sa otprilike 17 puta više nepoznatih i pokazuje sporiju konvergenciju.



Sl. 3. Relativna greška izračunavanja dominantnog moda sferične ljuske.

Analiza korišćenjem geometrijskog elementa drugog reda veoma brzo konvergira, ali se greška ne smanjuje sa povećanjem reda aproksimacije polja. Geometrijski element četvrtog reda mnogo tačnije opisuje sferični rezonator i povećanje reda aproksimacije polja u ovom slučaju dovodi do brzog smanjivanja greške.

IV. HIBRIDNE METODE MOMENATA I FIZIČKE OPTIKE

Fizička optika (PO) je asimptotska tehnika i primenjuje se za analizu velikih, glatkih struktura. Ona predstavlja aproksimaciju egzaktne integralne jednačine za magnetsko polje i povezuje struje indukovane na metalnoj površi sa incidentnim magnetskom poljem:

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}^i, & \text{u obasjanom delu,} \\ 0, & \text{u senci.} \end{cases} \quad (9)$$

Hibridizacija metode momenata i fizičke optike podrazumeva podelu strukture na dva dela i primenu integralne jednačine električnog polja u MoM regionu i PO aproksimacije u PO regionu. Polje koje zrače struje u MoM regionu tretira se kao incidentno u PO regionu. Napomenimo još i da, u generalnom slučaju, MoM i PO regioni mogu da se preklapaju.

Osnovni geometrijski element za modelovanje u hibridnom MoM-PO metodu je četvorougao višeg reda definisan u (1). Struje u MoM regionu aproksimiraju se

jednostavnim dvodimenzionim polinomskim funkcijama (2)-(4), dok se struje u PO regionu aproksimiraju interpolacionim polinomima

$$\mathbf{f}_{uij} = \frac{C_{uij}}{J} \frac{\mathcal{T}_{N_u+1}^{\text{mod}}(u)}{u - u_i^{\text{mod}}} \frac{\mathcal{T}_{N_v}(v)}{v - v_j} \mathbf{a}_u, \quad (10)$$

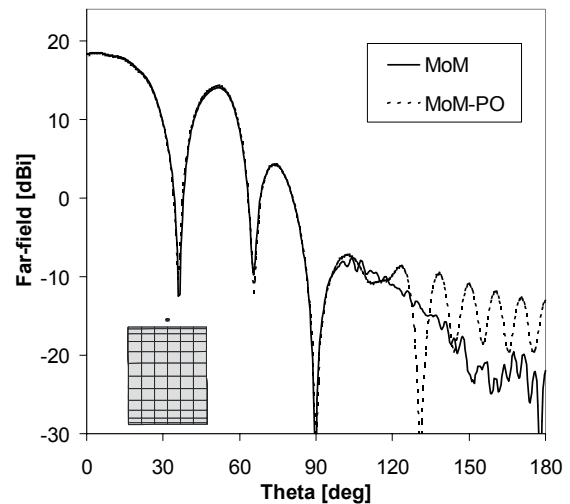
$$\mathbf{f}_{vij} = \frac{C_{vij}}{J} \frac{\mathcal{T}_{N_u}(u)}{u - u_i} \frac{\mathcal{T}_{N_v+1}^{\text{mod}}(v)}{v - v_j^{\text{mod}}} \mathbf{a}_v$$

gde su \mathcal{T}^{mod} i \mathcal{T} modifikovani Čebiševljevi polinomi, a C su faktori normalizacije. Nule modifikovanih polinoma su dobijene skaliranjem nula regularnih Čebiševljevih polinoma faktorima $\cos\{\pi/[2(N_u+1)]\}$.

U MoM regionu, za testiranje integralne jednačine se koriste funkcije istog oblika kao i funkcije bazisa (Galerkinov metod). U PO regionu koristi se metoda podešavanja u tačkama i to tačno u nulama regularnih i modifikovanih Čebiševljevih funkcija iz (10), čime se postiže jednostavnost matrice sistema.

Analizirajmo sada zračenje antenskog niza sačinjenog od pet dipola pobuđenih u fazi, koji se nalaze na rastojanju od 1.25λ od površine cilindra prečnika 15λ i visine od 12.5λ .

Slika 4. predstavlja daleko polje izračunato metodom momenata višeg reda [5] i hibridnom MoM-PO metodom [9]. U oba slučaja, broj nepoznatih uz korišćenje dvostruke simetrije problema iznosio je 6181. Vreme izvršavanja MoM analize iznosilo je oko 19 min, dok je za hibridnu MoM-PO analizu bilo dovoljno 2s na relativno sporom AMD XP-1700+ računaru sa 512 MB RAM-a.



Sl. 4. Daleko polje antenskog niza pozicioniranog iznad velikog cilindra

Slaganje između dva seta rezultata je gotovo perfektno za uglove manje od 90° , dok je u smeru senke razlika velika. Ovakvo ponašanje hibridne metode je očekivano, zato što su polja u senci cilindra uglavnom posledica difrakcije na ivicama cilindra koju fizička optika ne uzima u obzir.

LITERATURA

- [1] B. D. Popović, "Polynomial approximation of current along thin symmetrical cylindrical dipoles," *IEE Proc.*, vol. 117, pp. 873–878, 1970.
- [2] B. D. Popović, M. D. Dragović, and A. R. Djordjević, *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*. Chichester/New York: Research Studies Press/Wiley, 1982.
- [3] B. D. Popović and B. M. Kolundžija, "Analysis of metallic antennas and scatterers," in *IEE Electromagnetic Wave Series*. London, U.K.: IEE, 1994, no. 38.
- [4] B. D. Popović and B. M. Notaroš, "Entire-domain polynomial approximation of volume currents in the analysis of dielectric scatterers," *IEE Proc. – Microw., Antennas Propag.*, vol. 142, no. 3, pp. 207–212, Jun. 1995.
- [5] B. M. Kolundžija, "Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, no. 7, pp. 1021–1032, Jul. 1999.
- [6] M. Djordjević and B. M. Notaroš, "Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatterers," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 8, pp. 2118–2129, Aug. 2004.
- [7] M. M. Ilić and B. M. Notaroš, "Higher order hierarchical curved hexahedral vector finite elements for electromagnetic modeling," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 51, no. 3, pp. 1026–1033, Mar. 2003.
- [8] J. S. Wang and N. Ida, "Eigenvalue analysis in electromagnetic cavities using divergence free finite elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, pp. 3978–3981, Sept. 1991.
- [9] M. Djordjević and B. M. Notaroš, "Higher order hybrid method of moments—physical optics modeling technique for radiation and scattering from large perfectly conducting surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, no. 2, pp. 800–813, Feb. 2005.

ABSTRACT

The paper presents modeling of electromagnetic systems using higher-order elements (surfaces and volumes) within method of moments (MoM), finite elements method (FEM) and hybrid method of moments-physical optics technique (MoM-PO).

The examples in the paper represent results obtained during dissertation research of first two authors at University of Massachusetts Dartmouth, USA.

**HIGHER ORDER MODELING IN
COMPUTATIONAL ELECTROMAGNETICS**

Miroslav Djordjevic, Milan M. Ilić, and
Branislav M. Notaroš