Prvi nastavak za sintezu filtarske funkcije najdirektnijom primenom funkcije generatrise klasičnih ortogonalnih polinoma

Vlastimir D. Pavlović

***Sadržaj* — Dat je deo originalne tehnike sinteze prototipske niskofrekventne filtarske funkcije sa svim nulama prenosa u beskonačnosti parnog ili neparnog reda i predstavljen u ovom radu u kompaktnom eksplicitnom obliku. Direktnim dugim (ne strmim) prekidanjem beskonačnog apsolutnog razvoja konstante u red primenom generatrise ortogonalnih neperiodičnih klasičnih polinoma je dobijena filtarska funkcija.**

Dugim prekidom apsolutnog razvoja konstante u red dužine r uzastopnih članova reda od $N+1$ do $N+r$ generisana je nova aproksimaciona funkcija koja ima $N+r$ zaravnjenja u koordinatnom početku i obezbeđuje uvek monotonu filtarsku funkciju nezavisno da li je strmim prekidom dobijena nemonotona filtarska funkcija .

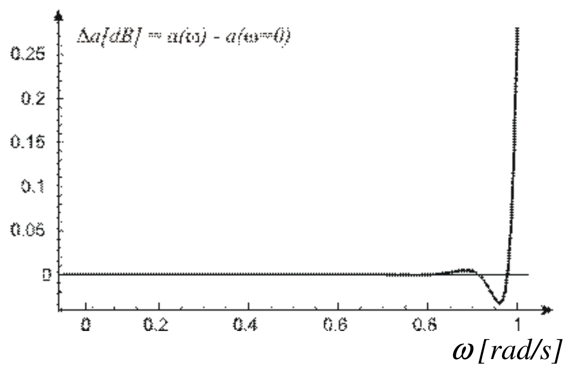
Po prvi put je na bilo koji način dato matematičko izvođenje dobro poznate tradicionalne Butterworth-ove filtarske funkcije i to najdirektnijom primenom bilo kog klasičnog ortogonalnog polinoma iz seta tradicionalnih neperiodičnih klasičnih ortogonalnih polinoma.

***Ključne reči* — apsolutni razvoj konstante, aproksimaciona tehnika, dugi prekid beskonačnog polinomskog razvoja, generatrisa ortogonalnih polinoma, filtarske funkcije.**

I. Uvod

U literaturi je detaljno proučena tehnika rešavanja ekstremalnih problema sinteze filtarskih funkcija primenom ortogonalnih polinoma [1,2,3,4], i primenom sopstvenih vrednosti [5,6]. U radovima [7,8,9] demonstrirana je nova tehnika najdirektnije primene funkcije generatrise klasičnih ortogonalnih polinoma za određivanje prototipskih filtarskih funkcija. Startovalo se od originalnog moćnog ekstremalnog prirodnog apsolutnog razvoja konstante u red, koji je autor ovog rada uveo u literaturu, pri čemu je monotona i nemonotona filtarska funkcija parnog ili neparnog reda dobijena direktno u kompaktnom obliku prosto strmim prekidanjem apsolutnog razvoja i uvek ima osobinu da poseduje N zaravnjenja amplitutske karakteristike u koordinatnom početku, nezavisno od tipa seta klasičnih ortogonalnih polinoma i nezavisno od vrednosti slobodnog parametra.

Filtarske funkcije nastale prekidanjem apsolutnog razvoja u gornjem delu propusnog opsega imaju promenu amplitudske karakteristike što je direktna posledica strmog prekidanja egzaktnog apsolutnog razvoja konstante u polinomski red. Treba naglasiti da je dobro poznat Gibbsov fenomen [16] opisan u prekidu pravilnog Furijeovog reda na neki način prisutan i kod prekida razvoja funkcija generatrisa svih klasičnih ortogonalnih polinoma, izdvajanjem početnih prvih N članova. Ta zajednička osobina izražena u gornjem delu propusnog opsega može se ilustrovati na slici 1. Na slici 1. prikazan je oblik promene slabljenja filtarskih funkcija dobijenih primenom funkcije generatrise klasičnih ortogonalnih polinoma.



Sl. 1 Oblik amplitudske karakteristike filtra u propusnom opsegu nastale direktnom primenom funkcije generatrise klasičnih ortogonalnih polinoma i strmim prekidom apsolutnog razvoja konstante u polinomski red.

Opisane normalizovane filtarske funkcije generalno važe za sve poznate realizacije (LC, LC sa gubicima, mikrotalasna realizacija, RC aktivna i digitalna realizacija) opisane u literaturi [1], [4], [10-15].

II. Tok aproksimacije

Apsolutni razvoj konstante u polinomski red primenom funkcije generatrise klasičnih neperiodičnih ortogonalnih polinoma dat je reprezentativnim izrazom (1).

$$const \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha)^k x^k Q_k(x) \qquad (1)$$

gde je, $Q_k(x) \in \left\{ C_k^{\nu}(x), P_k(x), T_k(x), U_k(x) \right\}$ set klasičnih neperiodičnih ortogonalnih polinoma $k-tog$ reda (Gegenbauer-ovi, Legendr-ovi, Chebyshev-ljevi polinomi prve i druge vrste), α slobodni parametar, $(\alpha)^k$ faktor spektralne komponente apsolutnog razvoja, a

Vlastimir D. Pavlović, Elektronski fakultet u Nišu, P.O.Box 73, 18000 Niš, Republika Srbija (telefon: 381-18-529206; faks: 381-18-588399; e-mail: vpavlovic@elfak.ni.ac.yu).

čija je vrednost određena izborom vrednosti parametra α. Izraz (1) može se napisati u ekvivalentnom obliku (2).

$$const \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, x^{(2k-2m)} \tag{2}$$

Strmim prekidanjem apsolutnog razvoja i izdvajanjem prvih N uzastopnih članova, iz predhodne formule (2) dobija se jednostavno funkcija $2N-tog$ reda,

$$const\ (N) = \sum_{k=0}^{N} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, x^{(2k-2m)} . \tag{3}$$

Na isti način formiramo i razvoj $(N+r)-tog$ reda

$$const\ (N+r) = \sum_{k=0}^{N} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, x^{(2k-2m)} + \sum_{k=N=1}^{N+r} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, x^{(2k-2m)} \tag{4}$$

Funkcija $\Phi(N,\omega)$ se dobija direktno iz prethodne formule (4)

$$\Phi(N,\omega) = \sum_{k=0}^{N} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, \omega^{(2k-2m)} . \tag{5}$$

Na primer, za $N=5$ i $N=8$ predhodna funkcija ima oblik, respektivno:

$$\Phi(5,\omega) = c(5,1)\,\omega^{6} + c(5,2)\,\omega^{8} + c(5,3)\,\omega^{10} \tag{6}$$

$$\Phi(8,\omega) = c(8,0)\,\omega^{8} + c(8,1)\,\omega^{10} + c(8,2)\,\omega^{12} + c(8,3)\,\omega^{14} + c(8,4)\,\omega^{16} . \tag{7}$$

Takođe i funkcija $\Phi(N+r,\omega)$ se može napisati u obliku zbira parcijalnih suma (8),

$$\Phi(N+r,\omega) = \sum_{k=0}^{N} b(k) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, \omega^{(2k-2m)} + \sum_{k=N+1}^{N+r} b(k) \sum_{m=k-N}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(k,m)\, \omega^{(2k-2m)} \tag{8}$$

odnosno u razvijenom obliku, gde imamo:

$$\begin{aligned}
\Phi(N+r,\omega) = \Phi(N,\omega) &+ \\
b(N+1) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+1,m)\, \omega^{(2N+2-2m)} &+ \\
b(N+2) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+2,m)\, \omega^{(2N+4-2m)} &+ \\
b(N+3) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+3,m)\, \omega^{(2N+6-2m)} &+ \ldots + \\
b(N+r-1) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+r-1,m)\, \omega^{(2N+2r-2-2m)} &+ \\
b(N+r) \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+r,m)\, \omega^{(2N+2r-2m)} &
\end{aligned} \tag{9}$$

Dugim prekidom u r uzastopnih članova apsolutnog polinomskog razvoja konstante predložena formula ima oblik polinoma $2N-tog$ reda.

$$\begin{aligned}
\Phi(N,r,\omega) = \Phi_1(N,\omega) &+ \\
b(N+1) \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+1,m)\, \omega^{(2N+2-2m)} &+ \\
b(N+2) \sum_{m=2}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+2,m)\, \omega^{(2N+4-2m)} &+ \\
b(N+3) \sum_{m=3}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+3,m)\, \omega^{(2N+6-2m)} &+ \ldots + \\
b(N+r-1) \sum_{m=r-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+r-1,m)\, \omega^{(2N+2r-2-2m)} &+ \\
b(N+r) \sum_{m=r}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} c(N+r,m)\, \omega^{(2N+2r-2m)} &
\end{aligned} \tag{10}$$

Funkcija $\Phi(N,r,\omega)$ za $N=8$, $r=2$ ima oblik:

$$\Phi(8,2,\omega) = d(8,2)\,\omega^{12} + d(8,3)\,\omega^{14} + d(8,4)\,\omega^{16} \tag{11}$$

U radu [8] određena je funkcija $\Phi(N,\omega)$, koja uvek ima N zaravnjenja u koordinatnom početku čiji je opšti oblik dat izrazom (12):

$$\Phi(N,\omega)=\sum_{k=0}^{r} b(k)\,\omega^{(2N-2k)} \tag{12}$$

Očigledno, kvadrat amplitudske karakteristike filtarske funkcije $N-tog$ reda je dat u standardnom obliku:

$$A(N,r,\omega)=1+\varepsilon^2\sum_{k=0}^{N-r} a(k)\,\omega^{(2N-2k)} \tag{13}$$

Primer 1: Primenom formule (13) karakteristična funkcija $A\ (N,r,\omega^2)$, za $n=8$, $\nu\to 0$ i $r=1$ dobija oblik (14):

$$A(8,1,\omega^2)= -\frac{1}{247}\omega^{10}+\frac{40}{247}\omega^{12}-\frac{240}{247}\omega^{14}+\frac{448}{247}\omega^{16} \tag{14}$$

Primer 2: Primenom formule (13) karakteristična funkcija $A\ (N,r,\omega^2)$, za $n=8$, $\nu\to 0$ i $r=2$ ima oblik (15):

$$A\ (8,\ 1,\ \omega^2)=\frac{5}{261}\omega^{12}-\frac{80}{261}\omega^{14}+\frac{112}{87}\omega^{16}. \tag{15}$$

Za $r=N$ dobija se partikularno rešenje i to nezavisno od tipa seta klasičnih ortogonalnih polinoma:

$$A\ (N,\ N,\ \omega)\ =\ 1\ +\ \varepsilon^2\omega^{2N}\ , \tag{16}$$

a koje predstavlja izvođenje tradicionalnog Butterworth-ovog filtra $N-tog$ reda, nezavisno od tipa klasičnog ortogonalnog polinoma. To rešenje je jedinstveno i određeno je samo izborom vrednosti celobrojnog parametra, r. Celobrojna vrednost parametra, r, je u opsegu $r\in\{0,1,\dots N\}$. Za $r=0$, rezultati su opisani detaljno u radovima [7, 8, 9], a za $r=N$ u ovom radu je opisano izvođenje jedinstvenog rešenja u literaturi poznatog kao tradicionalna maksimalna ravna aproksimacija amplitudske karakteristike u koordinatnom početku. Ova rešenja su prosto rezultat koji generalno važi za sve klasične ortogonalne polinome a dobijaju se jednostavno izborom parametra r, za zadati red filtarske funkcije N i zadati tip ortogonalnih polinoma.

III. VALIDNOST SINTEZE

Ilustrovana su tri primera sinteze filtarske funkcije primenom opisane tehnike jedanaestog reda sa slabljenjem na graničnoj frekvenciji propusnog opsega od 0.28 dB, a dobijene primenom predložene formule (16) i korišćenjem Gegenbauer-ovih ortogonalnih polinoma za vrednost parametra $\upsilon=1.5$, $\alpha=1.5$ i za vrednost slobodnog parametra, $r=0$ (strmi prekid), $r=1$ (dugi prekid) i $r=2$ (dugi prekid), respektivno. Polovi predloženih filtarskih funkcija su dati u Tabelama I, II i III, respektivno.

TABELA I: $n=11$, $\rho=0.25$, $\upsilon=1.5$, $\alpha=1.5$, $r=0$ i $a(\omega=1)=0.28\ dB$

$s_{r,r+1}=\sigma_r\pm j\omega_r,\ r=1,2,\dots\left[\frac{n+1}{2}\right]$
-0.867959271558 ± j0
-0.829430377676 ± j0.284448491592
-0.717605763902 ± j0.549666630903
-0.544133265819 ± j0.778377753305
-0.329984714298 ± j0.955728190668
-0.106733892662 ± j1.062944830226

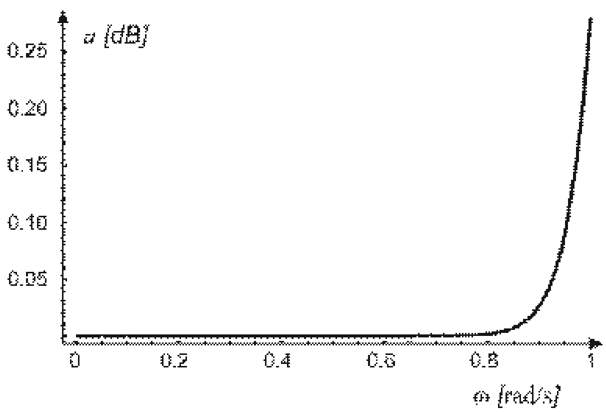
TABELA II: $n=11$, $\rho=0.25$, $\upsilon=1.5$, $\alpha=1.5$, $r=1$ i $a(\omega=1)=0.28\ dB$

$s_{r,r+1}=\sigma_r\pm j\omega_r,\ r=1,2,\dots\left[\frac{n+1}{2}\right]$
-1.053872346961 + j0
-1.010864559794 ± j0.315748613889
-0.885712360917 ± j0.606538490402
-0.689397529115 ± j0.848672237519
-0.437897585992 ± j1.021458041383
-0.150277468318 ± j1.110731522101

TABELA III: $n=11$, $\rho=0.25$, $\upsilon=1.5$, $\alpha=1.5$, $r=2$ i $a(\omega=1)=0.28\ dB$

$s_{r,r+1}=\sigma_r\pm j\omega_r,\ r=1,2,\dots\left[\frac{n+1}{2}\right]$
-1.091324306808 + j0
-1.047072244225 ± j0.317304694791
-0.917983875093 ± j0.609003436052
-0.714648287377 ± j0.851391709527
-0.453475498254 ± j1.024657326342
-0.155400728980 ± j1.114811830241

Na slici 2 prikazana je amplitudska karakteristika u propusnom opsegu predloženog filtra jedanaestog reda čiji su polovi dati u Tabeli II a za vrednost slobodnog parametra, $r = 1$. Sada smo dobili monotoni oblik amplitudske karakteristike u gornjem delu propusnog opsega i ako je predhodno polazno rešenje za $r = 0$ dobijeno strmim prekidom apsolutnog razvoja imalo pojačanje u tom delu opsega (nemonotoni oblik amplitudske karakteristike). Ovaj efekat oblikovanja amplitudske karakteristike u gornjem delu propusnog opsega generalno važi za ceo set klasičnih ortogonalnih polinoma i dovoljno je da r ima vrednost jedan i da se uspešno eliminiše efekat, da kažemo uslovno, Gipss-ovog fenomena za neperiodične polinomske kontinualne funkcije nastale strmim prekidom egzaktnog beskonačnog razvoja konstante. Možda dugi prekid beskonačnog razvoja u z domenu odgovara rezultatima dobijenih peglanjem karakteristika primenom prozorskih funkcija. Analiza filtarskih funkcija u z domenu biće opisana u daljem toku istraživanja a za polinome ortogonalne na jediničnom krugu.



Sl. 2 Amplitudska karakteristika predloženog filtra jedanaestog reda za $r = 1$ dobijena primenom Gegenbauer-ovog polinoma za vrednost parametra $\nu = 1.5$ a sa slabljenjem na graničnoj frekvenciji $a(\omega = 1) = 0.28\ dB$.

IV. ZAKLJUČAK

U radu je opisana moćna tehnika sinteze monotone filtarske funkcije primenom funkcije generatrise klasičnih ortogonalnih polinoma i specifičnim dugim prekidanjem apsolutnog razvoja konstante u polinomski red. Prvo prekidanje beskonačne sume je klasični strmi prekid opisan u [7,8,9] i ima za posledicu pojavu Gibbs-ovog fenomena u gornjem delu propusnog opsega. Drugo prekidanje je vrsta ekonomizacije koja uvek obezbeđuje $(N + r)$ zaravnjenja u koordinatnom početku a to prekidanje je izvedeno u r uzastopnih članova apsolutnog razvoja za zadati red filtarske funkcije, n.

Partikularno rešenje opisane tehnike, za bilo koji izabrani tip seta ortogonalnih klasičnih polinoma, za numeričku vrednost slobodnog parametara $r = N$, je uvek tradicionalni Batterworth-ov filtar.

LITERATURA

[1] Rudolf Sall and Walter Entenmann, *"Handbook of Filter Design"*, AEG-TELEFUNKEN, Berlin, 1979

[2] V. D. Pavlović: "Least-square low-pass filters using Chebyshev polynomials", Int.J.Electronics, 1982, vol.53, No.4, pp. 371-379 (UK)

[3] V. D. Pavlović: "Direct synthesis of filter transfer functions", IEE Proceedings, Vol. 131, Pt.G. No, 4, August 1984, pp.156-160 (UK0

[4] B. D. Raković and V.D. Pavlović: "Method of designing doubly terminated lossy ladder filters with increased element tolerances", IEE Proceedings, Vol. 134, Pt. G, No.6, December 1987, pp. 285-291 (UK)

[5] P.P. Vaidyanathanan and T.Q. Nguyen-Eigenfilters, A new approach to least squares FIR filter design and appkication-IEEE Trans.Circuits and …, Vol.CAS-34, pp. 11-23, 1987.

[6] S.C. Pei and J.J.Shyu-Design of FIR Hilbert transformers and differentiators by eigenfilter-IEEE Trans.Circuits and Systems, Vol. CAS-35, pp. 1457-1461, 1989.

[7] Vlastimir D. Pavlović, *"Filter transfer function synthesis by Hermite generating function",* JOURNAL OF ELECTROTECHN. MATH., Kosovska Mitrovica, Vol. 9, No. 1, 2004, p.p. 35-41.

[8] Vlastimir D. Pavlović, *"Synthesis of filter function using generatings functions of classical orthogonal polynomials",* JOURNAL OF TECHNICAL SCIENCES AND MATHEMATICS, Kosovska Mitrovica, Vol. 10, No. 1, 2005, p.p. 35-46.

[9] Vlastimir D. Pavlović "*Filter transfer function synthesis by Gegenbauer generating function"*, YU PROCEEDINGS OF THE XXVII CONFERENCE OF ETAN, SARAJEVO, 6-10. JUNE 1988, part III, pp. 157-164.

[10] V. D. Pavlović and V. Popović, "*An Iterative Method for Lossy LC Ladder Filter Synthesis*", European Conference on Circuit Theory and design Proceedings, September 1987, Paris, pp. 185-190.

[11] G. S. Moshytz, "A comparison of continuous-time active RC filters for the analog front end", *Int. J. Circ. Theor. Appl.*, Vol. 35, 2007, pp. 575-595.

[12] P. P. Vaidyanathan, P. A. Regalia, S. K. Mitra, "Design of Doubly Complementary IIR Digital filters Using a Single Complex Allpass Filters with Multirate Applications", *IEEE Trans. On Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, No. 4, 1987, pp. 378-389.

[13] G. Jovanovic Dolcek, and S.K. Mitra, "Computationallly Efficient Multiplier-Free FIR Filter Design", Journal Computatcion Y Sistemas. ISSN 1405-5546, 2007, Vol. 10, No. 3, January-March, 2007, pp. 251-268.

[14] A. Fernandez Vazquez, and G. Jovanovic Dolcek, "Design of Lienar Phase IIR Filters With Flat magnitude Response Using Complex Coefficients Allpole Filters", Journal Computacion Y Sistemas. (Publication 2008), ISSN 1405/5546, Vol. 10, No. 4, April-June 2007, pp. 335-336.

[15] A. Fernandez Vazquez, and G. Jovanovic Dolcek, "A New Method for the Design of IIR Filters With Flat Magnitude Response", Journal IEEE Transactions on Circuits and Systems, TCAS I: Regular Papers, Vol. 53, No. 8, August 2006, pp. 1761-1771.

[16] Loukas Grafakos "Classical and Modern Fourier Analysis" Pearson Education, New Jersey, USA. 2004.

Abstract

The part of a original technique of even and odd order all-pole low-pass filter functions synthesis is presented in this paper. Direct long consecutive break-off of absolute expansion of constant is used, as well as generating functions of classical orthogonal polynomials. Long consecutive break-off of absolute expansion of the constant is performed for and r consecutive terms between $N + 1$ and $N + r$. For the first time in any way in literature, the derivation of well known Butterworth function using classical orthogonal polynomials is presented.

FIRST CONTINUATION OF ALL POLE LOW-PASS FILTER FUNCTION SYNTHESIS USING CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS GENERATING FUNCTION

Vlastimir D. Pavlović.