

Nova klasa filtarskih funkcija generisanih primenom Christoffel-Darboux-ove sume za Gegenbauer-ove polinome

Aleksandar D. Ilić, *Republička agencija za telekomunikacije - RATEL* i
Vlastimir D. Pavlović, *Elektronski fakultet u Nišu,*

Sadržaj — U radu se uvodi nova formulacija rešavanja uvek aktuelnog aproksimacionog problema nalaženja prototipskih filtarskih funkcija sa svim nulama prenosa u beskonačnosti. Polazni stav rešavanja problema aproksimacije jeste direktna primena formule Christoffel-Darboux-ove sume, koja inače važi za set ortogonalnih klasičnih polinoma, definisane i za Gegenbauer-ove ortogonalne polinome na konačnom intervalu $[-1, 1]$ uz primenu težinske funkcije sa jednim slobodnim parametrom. Filtarska funkcija je dobijena u kompaktnom eksplicitnom obliku iz koga se jednostavno, izborom numeričke vrednosti slobodnog parametra, pored prikazanih Gegenbauer-ovih filtarskih funkcija mogu lako generisati i filtarske funkcije Legendre-ovih i Chebysev-ljevih filtara prve i druge vrste sa istim kriterijumom aproksimacije. Ilustrovani primeri predloženih filtarskih funkcija, parnog desetog i neparnog jedanaestog reda, pokazuju da aproksimacija daje dobar kompromis između amplitudske i fazne karakteristike. Prikazana je i analiza uticaja tolerancija elemenata filtra (kondenzatora i otpornika) na amplitudsku karakteristiku i karakteristiku grupnog kašnjenja realizovanog aktivnog RC filtra. Superiornost predloženih filtarskih funkcija se ogleda u odličnoj amplitudskoj karakteristici koja praktično u celom propusnom opsegu skoro idealno aproksimira idealni filter i ima funkciju sumarne osetljivosti bolju od one koju ima Butterworth-ov filter. Postupkom prikazanim u ovom radu se generalno mogu izvesti i filtarske funkcije za realizaciju ostalih vrsta filtara drugog propusnog opsega.

Ključne reči — analiza tolerancije slabljenja, analiza tolerancije grupnog kašnjenja, ekstremalna svojstva, filtarske funkcije, Gegenbauer-ovi polinomi, Christoffel-Darboux-ova suma, RC aktivni filteri.

I. UVOD

U RADU se razmatra originalna sinteza filtarske funkcije korišćenjem moćne formule Christoffel-Darboux-ove sume za set Gegenbauer-ovih ortogonalnih polinoma na konačnom intervalu $[-1, 1]$, sa težinom $(1 - \omega^2)^{\nu}$.

U literaturi su razmatrane prelazne filtarske funkcije sa karakteristikama koje leže između graničnih karakteristika polaznih filtarskih funkcija i kompromisno zadovoljavaju zahteve za faznu i amplitudsku karakteristiku. To su

Aleksandar D. Ilić, Republička agencija za telekomunikacije-RATEL, Republika Srbija; (e-mail: aleksandar.ilic@ratel.org.rs).

Vlastimir D. Pavlović, Elektronski fakultet u Nišu, P.O. Box 73, 18000 Niš, Republika Srbija; (e-mail: vpavlovic@elfak.ni.ac.rs).

ekonomična rešenja sa karakteristikama dobijenim tako da da su poboljšane u jednom delu propusnog opsega na račun smanjenja svojstava u drugom delu opsega. Svojstva ovih filtara leže između graničnih osobina polaznih filtara koje više ili manje dominiraju u zavisnosti od izbora numeričkih vrednosti slobodnih parametara.

U ovom radu predloženo formulisanje filtarske funkcije važi za sve realizacije [1,7]. Ilustrovani primeri parnog i neparnog reda, jasno prikazuju odličnu aproksimaciju amplitudske karakteristike idealnog filtra u propusnom opsegu sve do frekvencija bliskih graničnoj frekvenciji. Isto tako, dobijene su i odlične karakteristike funkcije sumarne osetljivosti filtra koje su u gornjem delu propusnog opsega znatno bolje od istih karakteristika tradicionalnog Butterworth-ovog filtra istog reda. Izvršena je i realizacija linearnog aktivnog RC filtra 11-tog reda i data analiza tolerancija frekventnih karakteristika.

U radu je data generalizovana sinteza filtarskih funkcija iz reprezentativnog oblika filtarske funkcije. Izborom numeričke vrednosti slobodnog parametra, ν , direktno se generišu i sva moguća partikularna rešenja ove predložene aproksimacije a uz primenu Legendre-ovih i Chebysev-ljevih ortogonalnih polinoma prve i druge vrste.

II. KLASIČNE FILTARSKE FUNKCIJE

Filtarska funkcija n -toga reda sa svim nulama prenosa u beskonačnosti u Laplasovoj s -ravni ima oblik

$$H_n(s) = \frac{k}{(1 + \frac{s}{\sigma_r})^u \prod_{k=1}^N (1 + \frac{s}{\omega_{0k} Q_k} + \frac{s^2}{\omega_{0k}^2})}, \quad (1)$$

gde su: n red filtarske funkcije, $N = \lfloor n/2 \rfloor$, k konstanta koja određuje slabljenje filtra na $\omega = 0$, σ_r realni pol, ω_{0k} i Q_k moduo i Q faktor k -tog para polova i u celobrojna vrednost koja se izračunava formulom $u = n - 2N$. Filtarska funkcija (1) može se napisati i u faktorizovanom obliku

$$H_n(s) = \frac{K}{\prod_{r=1}^n (s - s_r)}, \quad (2)$$

gde su: $s_r = \sigma_r + j\omega_r$, $r = 1, 2, \dots, n$, polovi filtarske funkcije iz leve Laplasove poluravni, s .

Uvođenjem smene $s^2 = -\omega^2$, dobija se funkcija kvadrata amplitudske karakteristike na imaginarnoj osi, $j\omega$, Laplasove ravni, s , u obliku

$$H_n(s)H_n(-s)|_{s=j\omega} = H_n(\omega^2) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 A_n(\omega^2)}, \quad (3)$$

gde je, $A_n(\omega^2)$ karakteristična funkcija i ε^2 parametar.

U literaturi je dobro poznata sinteza prototipske polinomske filtarske funkcije (1), dobijene aproksimacijom amplitudske karakteristike najdirektnijom primenom seta klasičnih ortogonalnih polinoma Q_n . Direktnom primenom klasičnih ortogonalnih polinoma: C_n^v , P_n , T_n , U_n , [8,9], na konačnom intervalu $[-1,1]$, se dobijaju tradicionalne filtarske funkcije koje imaju poznatu funkciju kvadrata amplitudske karakteristike sledećeg opšteg oblika

$$H_n(\omega^2) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 Q(n, \omega) Q(n, \omega)}, \quad (4)$$

za n parno ili neparno. Neke aproksimacije filtarske funkcije opisane izrazom (4) date su u literaturi [10-20].

III. PREDLOŽENE FILTARSKÉ FUNKCIJE

Karakteristična funkcija predložena u ovom radu, $A_n(\omega^2)$, formirana direktnom primenom Christoffel-Darboux-ove formule za ortogonalne neperiodične klasične Gegenbauer-ove polinome ima sumirajući oblik, dat izrazom

$$A_n(\omega^2, \nu) = C(1, \nu, \omega) C(1, \nu, \omega) + C(2, \nu, \omega) C(2, \nu, \omega) + \dots + C(n, \nu, \omega) C(n, \nu, \omega), \quad (5)$$

odnosno, kompaktni eksplicitni oblik

$$A_n(\omega^2, \nu) = C(n, \nu, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} C(n-1, \nu, \omega) - C(n-1, \nu, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} C(n, \nu, \omega). \quad (6)$$

IV. SPECIJALNE KLASÉ PREDLOŽENE FILTARSKÉ FUNKCIJE

Iz reprezentativne jednačine (5), dobijene najdirektnijom primenom Christoffel-Darboux-ove sume za set uzastopnih Gegenbauer-ovih ortogonalnih polinoma, se izborom vrednosti slobodnog parametra, ν , može dobiti i set partikularnih filtarskih funkcija za svaki od klasičnih ortogonalnih polinoma. U literaturi [19,20,21] su date karakteristike filtara i kompletna izvođenja filtarskih funkcija direktnom primenom seta klasičnih ortogonalnih polinoma. Izborom seta numeričkih vrednosti slobodnog parametra, ν , amplitudska karakteristika, $A_n(\omega^2, \nu)$, direktno generiše set partikularnih rešenja, prikazanih narednim izrazima (7), (8) i (9), respektivno;

- za $\nu = 0$, Chebyshev-ljev polinom prve vrste,

$$A_n(\omega^2) = T(1, \omega)T(1, \omega) + T(2, \omega)T(2, \omega) + \dots + T(n, \omega)T(n, \omega) \quad (7)$$

- za $\nu = 0.5$, Legendre-ov polinom,

$$A_n(\omega^2) = P(1, \omega)P(1, \omega) + P(2, \omega)P(2, \omega) + \dots + P(n, \omega)P(n, \omega) \quad (8)$$

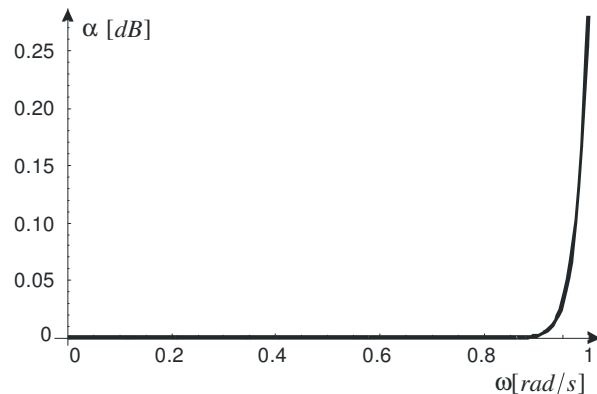
- za $\nu = 1$, Chebyshev-ljev polinom druge vrste,

$$A_n(\omega^2) = U(1, \omega)U(1, \omega) + U(2, \omega)U(2, \omega) + \dots + U(n, \omega)U(n, \omega) \quad (9)$$

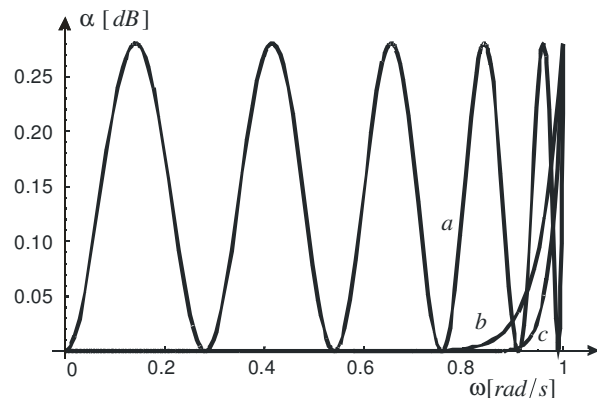
V. VALIDNOST REZULTATA APROKSIMACIJE

Opisani originalni metod ilustrovaćemo sa dva primera nove filtarske funkcije, za parni i neparni red i predhodno izabrani red filtra i izabranu numeričku vrednost slobodnog aparametra, ν .

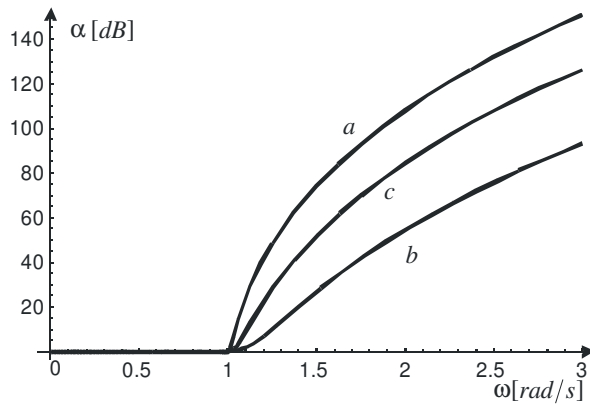
Primer 1: Primenom predloženog izraza (5) za neparni red filtra $n = 11$, vrednost slobodnog parametra $\nu = 1.5$ i slabljenje na graničnoj frekvenciji propusnog opsega od $0,28dB$, određeni su polovi filtarske funkcije. Na slici 1 je ilustrovan oblik amplitudske karakteristike predloženog filtra u propusnom opsegu. Na slikama 2 i 3 je dato poređenje amplitudskih karakteristika u propusnom i nepropusnom opsegu Chebyshev-ljevog, Butterworth-ovog i predloženog filtra, respektivno. Poređenje apsolutnih vrednosti funkcija sumarne osetljivosti u logaritamskoj razmeri (u dB) predloženog filtra i klasičnog Butterworth-ovog i Chebyshev-ljevog filtra je prikazano na slici 4. Sa slika 2 i 4, zaključujemo da se predloženi filtri mogu uspešno porediti sa stanovišta ekstremalno malih vrednosti slabljenja u propusnom opsegu i ekstremalno malih vrednosti sumarne osetljivosti u propusnom opsegu.



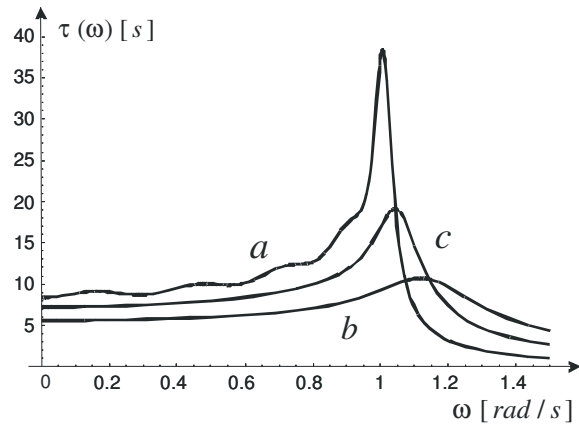
Sl.1 Amplitudska karakteristika predložene filtarske funkcije u propusnom opsegu 11-tog reda dobijene izrazom (5) za $\nu = 1.5$.



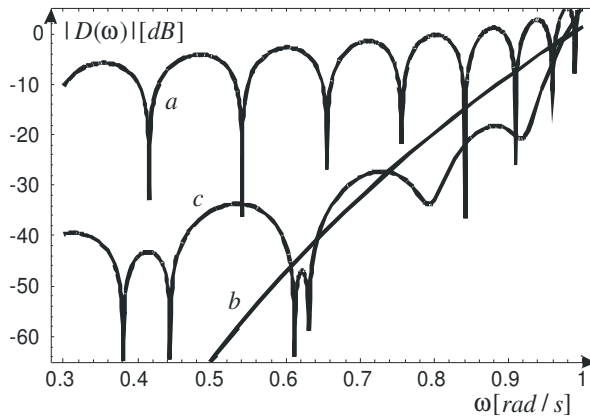
Sl. 2 Poređenje amplitudskih karakteristika u propusnom opsegu: (a) Chebyshev-ljevog, (b) Butterworth-ovog i (c) predloženog filtra, 11-tog reda.



Sl.3 Poređenje amplitudskih karakteristika filtera 11-tog reda: (a) Chebyshev-a, (b) Butterworth-a i (c) novog filtra.

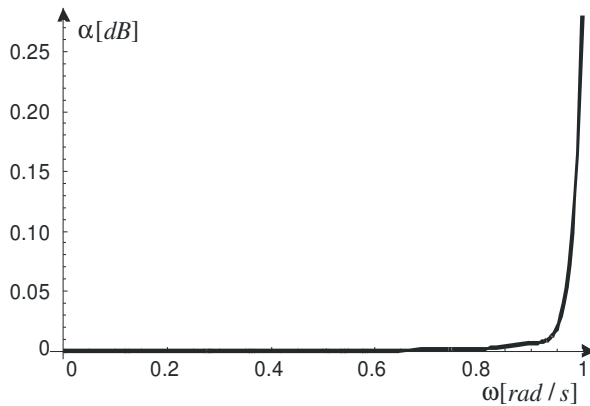


Sl.6 Poređenje karakteristika grupnog kašnjenja filtera desetog reda (a) Chebyshev-a, (b) Butterworth-a i (c) novog filtra dobijenog izrazom (5) za $\nu = 1.5$.



Sl. 4. Poređenje apsolutne vrednosti funkcije sumarne osetljivosti u dB u propusnom opsegu: (a) Chebyshev-ljevog, (b) Butterworth-ovog i (c) predloženog filtra.

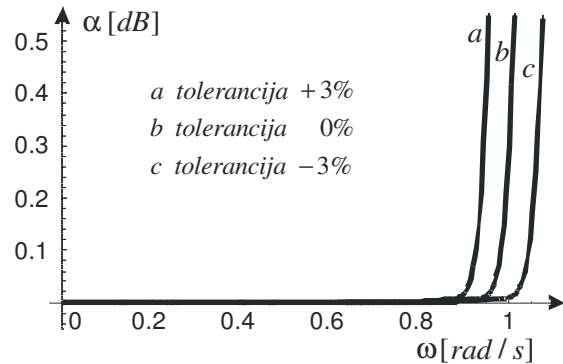
Primer2: Primenom predloženog izraza (5) za parni red filtera $n = 10$, vrednost slobodnog parametra $\nu = 1.5$ i slabljenja na graničnoj frekvenciji od $0,28dB$, određeni su polovi filterarske funkcije. Na slikama 5 i 6, date su frekventne karakteristiike predloženog filtra u propusnom opsegu.



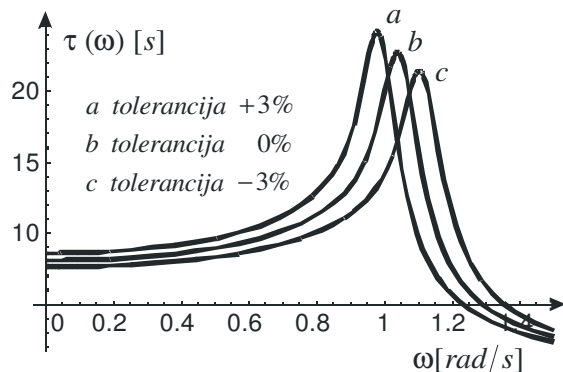
Sl.5 Amplitudska karakteristika predložene monotone selektivne filterarske funkcije u propusnom opsegu 10-tog reda dobijena istim izrazom (5), za vrednost $\nu = 1.5$.

VI. ANALIZA TOLERANCIJA FREKVENTNE KARAKTERISTIKE RC AKTIVNOG FILTRA

Realizovan je RC aktivni filter jedanaestog reda kaskadnim povezivanjem sekcija i izvršene su analize promena amplitudske karakteristike u propusnom opsegu i promena grupnog kašnjenja u slučajevima kada svi kondenzatori i svi otpornici promene svoju vrednost za $\pm 3\%$. Primenom procedura datih u literaturi [22], dobijene su karakteristike prikazane na slikama 7 i 8. Nove tehnologije realizacije filtera opisane su u radu [23].



Sl.7 Analiza uticaja tolerancija kapacitivnosti $\pm 3\%$ i otpornosti $\pm 3\%$ na karakteristiku slabljenja u propusnom opsegu predloženog filtera 11-tog reda.



Sl.8 Analiza uticaja tolerancija kapacitivnosti $\pm 3\%$ i otpornosti $\pm 3\%$ na karakteristiku grupnog kašnjenja predloženog filtera 11-tog reda.

VII. ZAKLJUČAK

U ovom radu je opisan reprezentativni oblik prototipskih niskofrekventnih selektivnih filtarskih funkcija polinomskog tipa, parnog i neparnog reda, koje mogu da imaju monoton ili nemonoton oblik amplitudske karakteristike u propusnom osegu, dobijnih u eksplicitnom kompaktnom obliku na jednostavan način, najdirektnijom primenom Christoffel-Darboux-ove sume za Gegenbauer-ove ortogonalne polinome.

Izborom numeričke vrednosti samo jednog slobodnog parametra, može se oblikovati širok spektar frekventnih karakteristika filtera i veoma lako dozirati moguće kompromisno rešenje između zadatih zahteva za aproksimaciju fazne i amplitudske karakteristike filtra u okviru graničnih partikularnih karakteristika. Predložene filtarske funkcije imaju minimalne gubitke praktično u celom propusnom opsegu i tako odlično aproksimiraju idealni filter. Drugim rečima najveći deo slabljenja amplitudske karakteristike u propusnom opsegu ima vrednost $0dB$.

Izvedene filtarske funkcije imaju znatno bolju aproksimaciju amplitudske karakteristike u propusnom opsegu od odgovarajućih Butterworth-ovih filtarskih funkcija.

Isto tako, razmatrani su i primeri specijalnih slučajeva originalnog, opšteg rešenja datog u ovom radu. Dat je set partikularnih rešenja za poznate klasične ortogonalne polinome, dobijene iz predloženog opšteg rešenja uz najdirektniju primenu Christoffel-Darboux-ove sume.

Dalja verifikacija izložene originalne tehnike aproksimacije i analiza nekih njenih svojstava je data kroz navede primere predloženih filtarskih funkcija za parni i neparni red. Razmatran je realizovani RC aktivni filter i analiziran uticaj tolerancija elemenata na oblik amplitudske i karakteristike grupnog kašnjenja.

ZAHVALNICA

Zahvaljujemo se Milanu Radmanoviću, profesor u Elektronskog fakulteta u Nišu na korektnim sugestijama i sadržajnim diskusijama.

LITERATURA

- [1] G. S. Moschytz: "A comparison of continuous-time active RC filters for the analog front end", *Int. J. Circ. Theory Appl.* 35, pp. 575-595, 2007.
- [2] R. Sall and W. Entenmann, *Handbook of Filter Design*, AEG-TELEFUNKEN, Berlin, 1979.
- [3] B. Raković and V. Pavlović, "Method of designing doubly terminated lossy ladder filters with increased element tolerances", *IEE Proceedings*, Vol. 134, Pt. G. No. 6, pp. 285-291, UK, Dec. 1987.
- [4] P. P. Vaidyanathan, P. A. Regalia, S. K. Mitra, "Design of Doubly Complementary IIR Digital filters Using a Single Complex Allpass Filters with Multirate Applications", *IEEE Trans. On Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, No. 4, 1987, pp. 378-389.
- [5] G. Jovanovic Dolcek, and S.K. Mitra, "Computationally Efficient Multiplier-Free FIR Filter Design", *Journal Computacion Y Sistemas*. ISSN 1405-5546, 2007, Vol. 10, No. 3, January-March, 2007, pp. 251-268.
- [6] A. Fernandez Vazquez, and G. Jovanovic Dolcek, "Design of Lienar Phase IIR Filters With Flat magnitude Response Using Complex Coefficients Allpole Filters", *Journal Computacion Y*

- Sistemas*. (Publication 2008), ISSN 1405/5546, Vol. 10, No. 4, April-June 2007, pp. 335-336.
- [7] A. Fernandez Vazquez, and G. Jovanovic Dolcek, "A New Method for the Design of IIR Filters With Flat Magnitude Response", *Journal IEEE Transactions on Circuits and Systems, TCAS I: Regular Papers*, Vol. 53, No. 8, August 2006, pp. 1761-1771.
- [8] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, N.Y, USA, 1939.
- [9] D. S. Mitrinović i D. Ž. Đoković, *Specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.
- [10] V. Pavlović, "Least-square low-pass filters using Chebyshev polynomials", *Int. J. Electronics*, Vol. 53, No. 4, pp. 371-379, UK, 1982.
- [11] V. Pavlović, "Direct synthesis of filter transfer functions, *IEE Proceedings*", Vol. 131, Pt. G. No. 4, pp. 156-160, UK, Avg. 1984.
- [12] R. Petkovich and A. Ilich, "Synthesis of nonmonotonic filters with maximum slope out of the passband", *Proc. Internat. Symposium on circuits and systems IEEE*, Newport Beach, 1983.
- [13] Ilić, A., Sinteza nove klase selektivnih filtera sa nemonotonom amplitudskom karakteristikom, Magistarski rad, Niš, 1991.
- [14] V. Pavlović, "Filter transfer function synthesis by Hermite generating function", *Journal of Electrotechn. Math.*, Vol. 9, No. 1, pp. 35-41, Kosovska Mitrovica, 2004.
- [15] V. Pavlović, "Synthesis of filter function using generating functions of classical orthogonal polynomials", *Journal of Technical Sciences and Mathematics*, Vol. 10, No. 1, pp. 35-46, Kosovska Mitrovica, 2005.
- [16] V. Pavlović, "Filter transfer function synthesis by Gegenbauer generating function", *YU Proceedings of the XXVII Conference of ETAN*, Part III, pp. 157-164, Sarajevo, 6-10. June 1988.
- [17] N. Asai, I. Kuba, and H. Kuo, "Multiplicative renormalization and generating function", Part I, *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol. 7, No. 1, pp. 89-101, Mar. 2003.
- [18] N. Asai, I. Kuba, and H. Kuo, "Multiplicative renormalization and generating function", Part II, *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol. 8, No. 4, pp. 593-628, Dec. 2004.
- [19] Ilić Aleksandar i Pavlović Vlastimir, "Filtarske funkcije izvedene Christoffel-Darboux-ovom formulom i Legendre-ovim polinomima", *Proceedings XIII Telecomm. forum-TELFOR*, Vol. 5.14., Nov. 2005.
- [20] Vlastimir D. Pavlović i Aleksandar D. Ilić, "Direktna sinteza monotonih i nemonotnih filtarskih funkcija primenom Christoffel-Darboux-ove formule za klasične ortogonalne polinome", *ELEKTROTEHNIKA*, 55(2006)5, 2006.
- [21] Vlastimir D. Pavlović i Aleksandar D. Ilić, "Monotone i nemonotone filtarske funkcije izvedene primenom Christoffel-Darboux-ove formule", 14. Telekomunikacioni forum TELFOR, Vol. 5.8., Nov. 2006.
- [22] M. D. Lutovac, D. V. Tošić, B. L. Evans, "Filter Design for Signal Processing Using MATLAB and Mathematica", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, ISBN 0-201-36130-2, (c) 2001.
- [23] Jiang J., Wang Y., "Desing of a tunable frequency CMOS fully differential fourth-order Chebyshev filter", *Microelectronics Journal, ELSEVIER* Vol. 37, pp. 84-90, 2006.

ABSTRACT

New class of the all-pole low-pass selective filter function is obtained by most direct using Christoffel-Darboux formula for Gegenbauer polynomials. It is shown, that assigning only one free parameter to magnitude requirements it can be adjusted to meet a wide range of pass-band specifications, while still retaining the excellent pass-band and stop-band characteristic compared with the limit characteristics of the Butterworth and Chebyshev filter.

**A NEW CLASS OF ALL-POLE FILTER FUNCTION
SYNTHESIS BY CHRISTOFFEL-DARBOUX
FORMULA FOR GEGENBAUER POLYNOMIALS**

Aleksandar D. Ilić and Vlastimir D. Pavlović.