Sinteza filtara sa konačnim impulsnim odzivom zasnovana na aritmetici ostataka

Negovan Stamenković, Siniša Minić i Vidosav Stojanović,

Sadržaj — **U radu je prikazana sinteza digitalnih filtara sa konačnim impulsnim odzivom zasnovana na aritmetici ostataka. Digitalna obrada signala, zasnovana na aritmetici ostataka, omogućava brzu obradu signala koja sadrži samo operacije množenja i sabiranja, a to su filtri sa konačnim impulsnim odzivom. Tokom obrade signala treba izbeći operaciju deljenja i pekoračenje rezultata navedenih aritmetičkih operacija. Simulacija obrade signala izvršena je u programskom paketu MATLAB® . Razvijeni su programi za direktnu i inverznu konverziju brojeva u reziduumski brojni sistem, aritmetičke operacije množenja i sabiranja kao i program za detekciju znaka broja. Na primeru filtra 31vog reda detaljno je opisana obrada signala u aritmetici ostataka.**

Ključne reči — **Digitalni filtri, direktna sinteza, filtri sa konačnim impusnim odzivom, aritmetika ostataka, paralelno procesiranje.**

I. Uvod

Istraživanja koja se odnose na reziduume i reziduumski brojni sistem datira još iz 4. veka nove ere, a prvi autor koji ih je spomenuo je Sun Tzu, u svojoj knjizi Suan-ching. Tehnika koju je Sun Tzu koristio da pronađe rešenje sledeće zagonetke

Imamo stvari čiji broj ne znamo,
ako ih grupišemo u trojke, ostatak je 2,
ako ih grupišemo u petorke, ostatak je 3,
ako ih grupišemo u sedmorke, ostatak je 2.
Koliko stvari imamo?

poznata je kao kineska teorema ostataka, danas ima veliki značaj u računarstvu. Povećavanjem dužine digitalne reči u memoriji računara, povećavaju se i brojevi koje možemo zapisati u računaru. Rad sa velikim brojevima povećava i samo vreme potrebno za izvršenje operacija nad tim brojevima. Kineska teorema ostataka omogućava da velike brojeve predstavimo manjim brojevima, a samim tim i ubrzamo aritmetičke operacije. Takođe, na ovaj način možemo predstaviti neke velike brojeve koje inače ne bi mogli da predstavimo u računaru.

Aritmetiku ostataka u računarima opšte namene prvi su uveli Szabo i Tanaka još davne 1976 godine [1]. U toj knjizi su detaljno opisali prednosti brzog množenja i sabiranja u odnosu na klasične postupke, kao i teškoće koje se odnose na deljenje, detekciju znaka i poređenja vrednosti brojeva.

Radovi iz digitalne obrade signala odnose se pre svega na izbor modula [2], [3], [4], [5] i detekciju znaka [6], [7], [8]. Relativno mali broj radova odnosi se na obradu signala koja se zasniva na aritmetici ostataka [9], [10], [11], [12], kako na realizaciji filtara sa konačnim impulsnim odzivom tako i na realizaciji filtara sa beskonačnim impulsnim odzivom.

Programski paket MATLAB® ne sadrži softver za obradu signala u aritmetici ostataka. Cilj rada je da se u programskom paketu MATLAB® razvije softver za simulaciju obrade signala, filtrom sa konačnim impulsnim odzivom, zasnovan na aritmetici ostataka. Softver treba da sadrži MATLAB® funkcije za osnovne operacije u aritmetici ostataka, kao i funkcije za transformaciju brojeva iz formata nepokretne tačke u celobrojne vrednosti i obrnuto. Razmatra se digitalni filtar sa konačnim impulsnim odzivom 31vog reda. Prikazuju se rezultati simulacije odziva filtra na jedinični niz i prostoperiodičnu diskretnu funkciju.

II. Aritmetika ostataka

Reziduumski brojni sistem (eng. residue number system RNS) je decimalni broj predstavljen n-torkom ostataka respektivno poređanih u odnosu na module iz skupa modula. Kako bi definisali jedan RNS broj, uzmimo decimalni broj X i jedan broj iz skupa modula koji formiraju vektor $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Decimalni broj X predstavljen u ovom sistemu bi izgledao kao skup brojeva $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ čiji se članovi dobijaju sledećom formulom

$$x_i = X \mod m_i, \quad 1 \le i \le n$$

Na ovaj način moguće je predstaviti bilo koji interval brojeva. Dužinu tog intervala I odredujemo sledećom formulom

$$I = m_1 m_2 \cdots m_n - 1 \tag{1}$$

Pri ovome treba obratiti pažnju na jedan veoma važan uslov. Taj uslov je da svi moduli iz skupa modula moraju biti uzajamno prosti brojevi, odnosno ne sme se javiti ni jedan par modula čiji će najveći zajednički delilac biti različit od jedinice. Dakle, moduli su dobro izabrani ako važi: najveći zajednički delilac (m_i, m_j)=1, za svako i, j takvo da važi $1 \le i, j \le n$.

Interval brojeva (1) se najčešće deli na dva jednaka dela $[-w, w]$ od kojih je jedan rezervisan za negativne brojeve a drugi za pozitivne brojeve. Opseg brojeva se računa prema formuli

$$-\frac{I}{2} \le X \le \frac{I}{2} \quad \text{za } I \text{ parno},$$

Zahvaljujemo se finansijskoj podršci Ministarstvu za nauku u okviru projekta pod brojem 18019.

N. Stamenković, Prirodno-matematički fakultet, K. Mitrovica, Srbija; e-mail: negovanstamenkovic@gmail.com.

S. Minić, Učiteljski fakultet u Prizrenu - Leposaviću, Lepsavić, Srbija; e-mail: sinisaminic@yahoo.com.

V. Stojanović, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; e-mail: vidosav.stojanovic@elfak.ni.ac.yu.

ili

$$-\frac{I+1}{2} \leq X \leq \frac{I+1}{2} - 1 \qquad \text{za } I \text{ neparno.}$$

Kada broj X iz intervala $[-w, w]$ želimo da zapišemo u reziduumskom brojnom sistemu kao negativan, dakle $-X$, primenjuje se sledeće pravilo. Svaki reziduum u zapisu broja se komplementira sa svojim odgovarajućim modulom iz skupa modula kao što pokazuje jednačina (2)

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad x_i = \begin{cases} \langle X \rangle_{m_i}, & X \in [0, w] \\ m_i - \langle X \rangle_{m_i}, & X \in [-w, 0) \end{cases} \qquad (2)$$

U slučaju da je reziduum jednak nuli, komplementiranje se ne vrši.

Operacije sabiranja i množenja su definisani u skupu celih brojeva na sledeći način

$$\begin{aligned} A \pm B &= \{\langle a_1 + b_1 \rangle_{m1}, \ldots \langle a_k + b_k \rangle_{mk}\}, \\ A \times B &= \{\langle a_1 \times b_1 \rangle_{m1}, \ldots \langle a_k \times b_k \rangle_{mk}\}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Ove jednačine ukazuju na paralelnu prirodu obrade signala a da pri tome nije potrebno voditi računa o prenosu.

Inverzna konverzija broja X koga karakterišu reziduumi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zasniva se na dokazu kineske teoreme ostataka

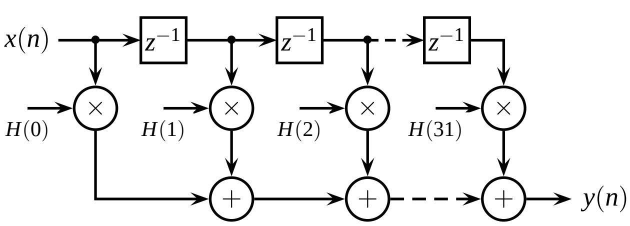
$$X = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle \gamma_i x_i \rangle_{m_i} M_i \right\rangle_M \qquad (4)$$

gde su $M = \prod_{i=1}^{k} m_i$, $M_i = M/m_i$, $\gamma_i = \langle M^{-1} \rangle_{m_i}$ je težina pozicije, dok je M_i^{-1} inverzni element broja M_i u odnosu na operaciju množenja u rezduumskom brojnom sistemu

$$\left\langle \langle M_i^{-1} \rangle_{m_i} M_i \right\rangle_{m_i} = 1, \quad 0 \leq M_i, \quad M_i^{-1} < m_i. \qquad (5)$$

Inverzni element u odnosu na množenje uvek postoji kada su moduli međusobno relativno prosti brojevi.

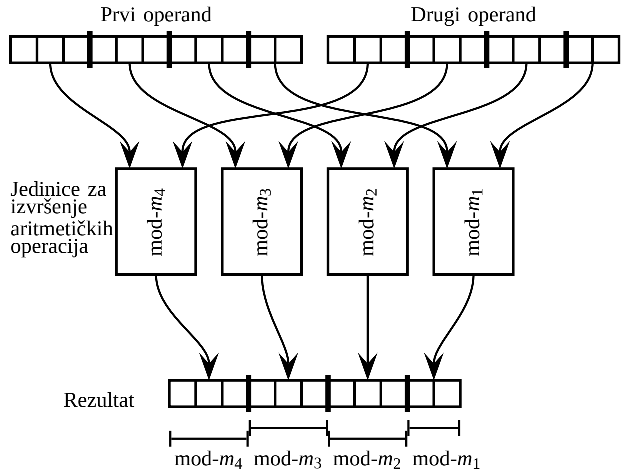
Na Slici 1 prikzana je direktna struktura filtra sa konačnim impulsnim odzivom 31vog reda.



Sl. 1. Direktna struktura filtra sa konačnim impulsnim odzivom trideset-prvog reda.

Na Slici 2 prikazana je paralelna obrada signala, kojom se simulira filtar sa konačnim impulsnim odzivom prikazan na slici 2, u RNS aritmetici sa četiri modula. U konkretnom slučaju digitalne obrade signala filtrom sa konačnim impulsnim odzivom, prvi operand čine koeficijenti filtra, dok drugi operand je ulazni niz.

Transformacija binarnog broja u RNS broj je privi korak kod obrade signali u aritmetici ostataka. Uočimo binarni broj X koji je zapisan u $t+1$ binarnom brojnom sistemu u kome



Sl. 2. Blok šema sistema koji obavlja aritmetičke operacije nad RNS brojevima.

se negativni brojevi prikazuju u potpunom komplementu

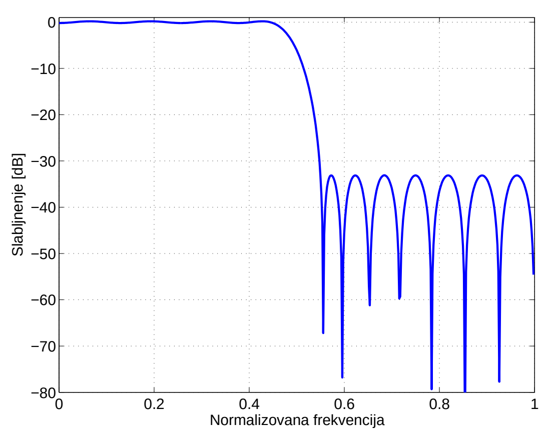
$$x = \sum_{j=0}^{t} B_j 2^j$$

gde je B_t bit znaka. Ako broj X želimo da zapišemo u RNS brojnom sistemu, ostatak za određeni moduo iz skupa modula dobićemo preko sledeće formule

$$X = \left\langle B_t (m_i - \langle 2^t \rangle_{m_i}) + \sum_{j=0}^{t-1} B_j \langle 2^j \rangle_{m_i} \right\rangle_{m_i}$$

III. Simulacija obrade signala u aritmetici ostataka

Na Slici 3 prikazana je karakteristika slabljenja nerekurzivnog digitalnog filtra propusnika niskih frekvencija sa linearnom faznom karakteristikom 31-vog reda koji je dobijen Parks-McClellanovim postupkom.



Sl. 3. Karakteristika slabljenja filtra sa konačnim impulsnim odzivom propusnika niskih frekvencija 31tog reda.

U Tabeli 1 su dati koeficijenti filtra i to: puna tačnost, celobrojne vrednosti i RNS prezentacija. Celobrojne vrednosti su dobijene tako što su vrednosti koeficijenata transformisane u binarne brojeve sa nepokretnom tačkom dužine 10 bita, sa razlomljenim delom koji iznosi 9 bita korišćenjem sledećeg para MATLAB® funkcija `q1=quantizer('round',[10 9])` i `B_bin=num2bin(q1,B)`. Od ovako generisanog binarnog broja `B_bin` dobijena je celobrojna prezentacija koeficijenata filtra primenom novog para MATLAB® funkcija `q2=quantizer('round',[10 0])` i `B_int=bin2num(q2, B_bin)`. Konačno, celobrojne vrednosti koeficijenata filtra su transformisane u RNS brojeve. MATLAB® funkcija za ovu operaciju je `B_RNS(i)=mod(B_int,RNS(i)` za $i = 1,2,3,4$, za skup modula $\{19, 23, 29, 31\}$.

TABELA 1. KOEFICIJENTI FILTRA PROPUSNIKA NISKIH FREKVENCIJA 31-VOG REDA.

	Puna tačnost	Int.	RNS broj
$H(0)=H(31)=$	-0.00686681410661	-4	$\{15\ \ 19\ \ 25\ \ 27\}$
$H(1)=H(30)=$	-0.01369823202037	-7	$\{12\ \ 16\ \ 22\ \ 24\}$
$H(2)=H(19)=$	0.01125107930570	6	$\{6\ \ 6\ \ 6\ \ 6\}$
$H(3)=H(28)=$	0.00880422294517	5	$\{5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\}$
$H(4)=H(27)=$	-0.01160511913915	-6	$\{13\ \ 17\ \ 23\ \ 25\}$
$H(5)=H(26)=$	-0.01450301466649	-7	$\{12\ \ 16\ \ 22\ \ 24\}$
$H(6)=H(25)=$	0.01729041606547	9	$\{9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\}$
$H(7)=H(24)=$	0.02038226289557	10	$\{10\ \ 10\ \ 10\ \ 10\}$
$H(8)=H(23)=$	-0.02467371536397	-13	$\{6\ \ 10\ \ 16\ \ 18\}$
$H(9)=H(22)=$	-0.02981955010187	-15	$\{4\ \ 8\ \ 14\ \ 16\}$
$H(10)=H(21)=$	0.02981955010187	19	$\{0\ \ 19\ \ 19\ \ 19\}$
$H(11)=H(20)=$	0.04657462794894	24	$\{5\ \ 1\ \ 24\ \ 24\}$
$H(12)=H(19)=$	-0.06172926692414	-32	$\{6\ \ 14\ \ 26\ \ 30\}$
$H(13)=H(18)=$	-0.08805312675403	-45	$\{12\ \ 1\ \ 13\ \ 17\}$
$H(14)=H(17)=$	0.14898863628661	76	$\{0\ \ 7\ \ 18\ \ 14\}$
$H(15)=H(16)=$	0.44971063397491	230	$\{2\ \ 0\ \ 27\ \ 13\}$

Usvojena je osmobitna konverzija ulaznog signala, što opseg brojeva u celobrojnoj notaciji iznosi $-127 \leq x(i) \leq 128$. Za ovako definisani ulazni niz, najveća apsolutna vrednost izlaznog niza iznosi

$$\begin{aligned} |y(n)| &\leq \max\{|u(n)| \sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| \\ &= 128 \times 1016 \\ &= 130\,048 \end{aligned}$$

što daje dinamički opseg od

$$\log_2(130\,048) = 16.9887 \text{ bita.}$$

Skup modula $m = \{19, 23, 29, 31\}$ daje sledeći opseg brojeva koji se može predstaviti u ovom brojnom sistemu je

$$M = \prod_{i=1}^{4} m_i = 392\,863$$

ili $\pm 196\,231$, što daje dinamički opseg od

$$\log_2(196\,431) = 17.5837 \text{ bita.}$$

Prema tome usvojeni skup modula u potpunosti zadovoljava dinamički opseg projektovanog filtra.

Odziv filtra $y(n)$ na ulazni niz $x(n)$ računa se prema formuli (6)

$$y(n) = H(0)x(n) + H(1)x(n-1) + \cdots + H(31)x(n-31) \quad (6)$$

gde su $H(i)$, $i = 0, 1, \ldots, 31$ koeficijenti filtra.

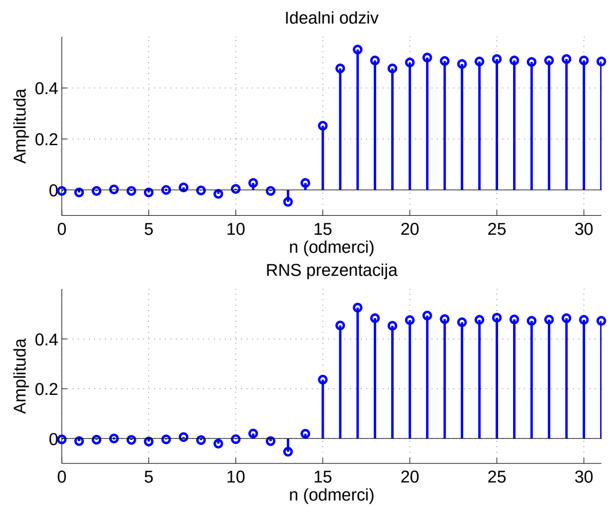
A. Odziv filtra na jedinični niz

Za simulaciju obrade signala filtrom sa konačnim impulsnim odzivom za ulazni signal usvojen je jedinični niz, koji je u celobrojnoj notaciji, dat sledećim izrazom

$$u(n) = \begin{cases} 62, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Kao rezultat paralelne obrade signala u RNS aritmetici prema formuli (6) dobija se odziv filtra u obliku RNS brojeva. U prvom koraku treba izvršiti njihovu konverziju u celobrojne dekadne brojeve `Y_int`, koje zatim treba transformisati u binarne brojeve. Pri ovoj transformaciji treba imati u vidu da su koeficijenti kodirani sa deset bita i da broj bitova kojim je kodiran ulazni signal, prema jednačini (7), iznosi šest bita. Nakon množenja ulaznog niza sa koeficijentima filtra dobija se proizvod dužine šesnaest bita. Dakle, za konverziju celobrojnih dekadnih brojeva treba koristiti format `q1o=quantizer('round',[16 0])` i `Y_bin=num2bin(q1o, B_int)`. Konačno, u drugom koraku se dobija konačan rezultat obrade signalu u formatu nepokretne tačke zasnovan na MATLAB® funkcijama `q2o=quantizer('round',[16 15])` i `Y=bin2num(q2o, Y_bin)`. Dalje, ovaj rezultat se može zaokružiti na željeni broj decimalnih mesta.

Na Slici 4 prikazan je odziv filtra na jedinični niz. Na slici je izvršeno poređenje odziva filtra na jedinični niz kada je primenjena aritmetika sa fiksnom tačkom i RNS aritmetika.



Sl. 4. Odziv filtra na jedinični niz; idealni odziv, gore; odziv dobije primenom aritmetike ostataka, dole.

Napomenimo da je za kodiranje koeficijenata filtra u formatu nepokretne tačke usvojeno 10 bita, a da je za kodiranje koeficijenata filtra u RNS aritmetrici potrebno po pet bita za svaki ostatak što u krajnjem iznosu iznosi 20 bita. Paralelno procesiranje digitalnih reči dužine pet bita je znatno brže od procesiranja digitalne reči dužine deset bita. Konačno, procesiranjem u RNS aritmetici filtar ne generiše šumove koji nastaju usled zaokruživanja aritmetičkih operacija.

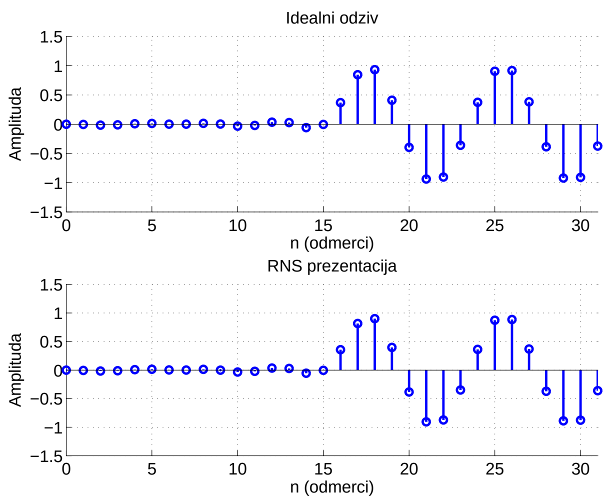
B. Odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju

Kao drugi primer izračunat je odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju $x = \sin(2\pi t/8)$. Normalizovana frekvencija iznosi $f = 1/8$ Hz i nalazi se u propusnom opsegu filtra. Kao što je prikazano na Slici 3, normalizovana vrednost frekvencije odmeravanja iznosi F_s =2 Hz. U celobrojnoj notaciji diskretni ulazni niz je

$$x(n) = \begin{cases} [62\sin(2\pi n/8)], & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \tag{8}$$

gde $[\cdot]$ označava da je za vrednost funkcije usvojen najbliži ceo broj.

Na Slici 5 prikazan je odziv filtra.



Sl. 5. Odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju; idealni odziv, gore; odziv dobijen primenom aritmetike ostataka, dole.

Na Slici 5 gore prikazan je odziv filtra koji je sračunat sa koeficijentima filtra u punoj tačnosti koršćenjem MATLAB® finkcije `filter`, dok je na Slici 5 dole prikazan odziv filtra sračunat primenom aritmetike ostataka. Evidentno je slaganje dobijenih rezultata.

Slični rezultati se dobijaju ukoliko se posmatra odziv filtra na prostoperiodični signal čija se frekvencija nalazi u nepropusnom opsegu filtra.

IV. Zaključak

U radu je prikazan pristup realizaciji digitalnog filtra sa konačnim impulsnim odzivom koji se zasniva na aritmetici ostataka. Na primeru digitalnog filtra sa konačnim impulsnim odzivom opisana je simulacija digitalne obrade signala u aritmetici ostataka. Razvijeni su MATLAB® programi za transformaciju koeficijenata filtra u RNS brojeve, množenje i sabiranje, kao i za inverznu transformaciju rezultata obrade signala u format nepokretne tačke. Izračunati su odzivi ovako projektovanog filtra na jedinični impulsni niz i prostoperiodičnu funkciju na kojima su analizirane karakteristike projektovanog sistema.

Softverska implementacija paralelne obrade signala i eliminisanje šumova usled zaokruživanja rezultata aritmetičkih operacija, je relativno jednostavna. Međutim, kod hardverske realizacije javljaju se dve značajne teškoće, a to su poređenje brojeva, na kome se zasniva određivanje znaka broja, i prekoračenje opsega brojeva.

Literatura

[1] N. Szabo and R. I. Tanaka, *Residue Arithmetic and its Application to Computer Technology*. New York: McGraw-Hill, 1967.

[2] A. Hiasat and A. Zohdy, "Residue-to-binary arithmetic converter for the moduly set $(2^k, 2^k-1, 2^{k-1}-1)$," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 204–209, Feb. 1998.

[3] G. C. Cardarilli, M. Re, and R. Lojacono, "Efficient modulo extraction for CRT based residue to binary converters," in *1997 IEEE Int. Symposium on Circuits and System*, Hong Kong, June 9–12 1997, pp. 2036–2039.

[4] A. Omodi and B. Prekumar, *Residue number system, Theory and implementation*. London: Imperial College Press, 2007.

[5] Y. Wang, X. Song, M. Abdoulhamid, and H. Shen, "Adder base residue to binary number cinverters for $(2^n-1, 2^n, 2^n-1)$," *TEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 5, no. 7, pp. 1772–1779, July 2002.

[6] Z. D. Ulman, "Sign detection and implicit-explicit conversion of numbers in residue arithmetic," *TEEE Trans. on Computers*, vol. C-32, no. 6, pp. 590–594, June 1983.

[7] T. Tomczak, "Fast sign detection for rns $(2^n-1, 2^n, 2^n+1)$," *TEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Regular papers*, vol. 55, no. 6, pp. 1502–1511, July 2008.

[8] Y. Wang, G. A. Jullien, and W. C. Miller, "An improved residue-to-binary number converter," *TEEE Trans. on Circuits System-I: Fundamental Theory Application*, vol. 47, no. 9, pp. 1437–1440, Sept. 2000.

[9] W. K. Jenkins and B. Leon, "The use of residue number systems in the design of finite impulse response digital filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-24, no. 4, pp. 191–201, Apr. 1997.

[10] P. Burrascano, G. C. Cardarilli, R. Lojacono, G. Martinelly, and M. Salerno, "Propertis and synthesis of RNS digital circuits," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 7, pp. 903–911, July 1990.

[11] M. A. Soderstrand and B. Sinha, "A pipelined recursive residue number system digital filter," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-31, no. 4, pp. 415–417, Apr. 1984.

[12] G. C. Cardarilli, N. Nannareli, and M. Re, "Reducing power disipation in FIR filter using the residue number sysyem," in *proc. 43rd IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2000.

Abstract

Synthesis of digital filters with finite impulse response based on residue arithmetics is presented in this paper. Digital signal processing based on residue arithmetics enable fast signal processing which contains operations of adding and multiplications only. It is convenient, during the signal processing, to avoid division operations and overflow of mentioned operations results. Digital signal processing simulation is performed in program package MATLAB®. Programs for direct conversion and inverse conversion number into residuum system number, are developed and also for arithmetic operations of multiplication and adding as well as program for number detection. Signal processing in residue arithmetic in described on the example of 31th order filter.

THE DESIGN OF FINITE IMPULSE RESPONSE DIGITAL FILTERS IN A RESIDUE NUMBER SYSTEM

Negovan Stamenković, Siniša Minić,
and Vidosav Stojanović