

Direktna sinteza IIR filtara neparnog reda pogodna za komplementarnu dekompoziciju

Dragana Živaljević, Vidosav Stojanović

Sadržaj — U radu je opisana direktna sinteza rekurzivnih digitalnih filtara čija karakteristična funkcija pripada klasi prelaznih IIR filtara. Karakteristika slabljenja u propusnom opsegu varira između maksimalno ravne i mini-max karakteristike. Sve nule prenosa nalaze se na jediničnom krugu tako da je ispunjen uslov za komplementarnu dekompoziciju. Izvršena je dekompozicija filtara neparnog reda na paralelnu vezu dva fazna korektora a zatim je sabiranjem formiran komplementarni niskofrekventni a oduzimanjem visokofrekventni filter. Ovi filtri generalno imaju osobine da su mnogo manje osetljivi na promenu dužine digitalne reči nego standardni filtri.

Ključne reči — Butterworthov filter, Chebyshevjev filter, Komplementarna dekompozicija, Prelazni filter.

I. UVOD

KOMPLEMENTARNI niskofrekvencijski/visokofrekvencijski filterski par se koristi u mnogim oblastima digitalne obrade signala, gde je potrebno razdvojiti signal na dva susedna frekvencijska opsega [1-5]. Realizacija komplementarnih IIR filtara zasnovana na paralelnoj vezi dva fazna korektora odlikuje se malom osetljivošću karakteristike slabljenja na promenu dužine digitalne reči [6]. Potreban i dovoljan uslov za komplementarnu dekompoziciju prenosne funkcije IIR filtra na paralelnu vezu dva fazna korektora je da polovi slabljenja leže na jediničnom krugu u z ravni i da u propusnom i nepropusnom opsegu imaju isti broj maksimuma i minimuma. Od poznatih prenosnih funkcija ovaj uslov ispunjavaju samo Butterworthov i Eliptički filter.

U radu će biti opisana direktna sinteza prelaznih IIR filtara sa svim nulama prenosa na jediničnom krugu, koji su pogodni za komplementarnu dekompoziciju. Karakteristika slabljenja u propusnom opsegu filtra varira između maksimalno ravne i mini-max karakteristike.

Rad je organizovan na sledeći način: najpre je dat oblik kvadrata modula amplitudske karakteristike koji generiše prelazni IIR filter sa konačnom nulom prenosne funkcije na jediničnom krugu. Zatim su određeni polovi i nule kvadrata prenosne funkcije u z ravni i izabrani oni polovi koji pripadaju unutrašnjosti kruga kako bi se odredila prenosna funkcija. Na kraju je pokazano da se dobijena prenosna funkcija može razložiti na dva fazna korektora. Sabiranjem prenosnih funkcija faznih korektora dobija se

filter propusnik niskih frekvencija, a oduzimanjem filter propusnik visokih frekvencija.

II. POSTUPAK APROKSIMACIJE

Kvadrat modula amplitudske karakteristike IIR filtra dat je izrazom

$$|H_N(x)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 K_N^2(x)} \quad (1)$$

gde je $K_N(x)$ karakteristična funkcija, a x frekvencijska promenljiva koja za sintezu niskofrekvencijskih filtara ima sledeći oblik

$$x^2 = \tan^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{-(z-1)^2}{(z+1)^2 \alpha} \quad (2)$$

Frekvencijska promenljiva x je normalizovana sa $\alpha = \tan^2(\omega_p T/2)$, gde je $\omega_p T = \omega_p / F_s$ propusni opseg filtra (F_s je frekvencija odmeravanja), čime je postignuto da je na granici propusnog opsega $x = 1$.

Karakteristična funkcija, kao i u slučaju kontinualnih filtara, može biti Butterworthov, Chebyshevjev ili neki drugi polinom ili racionalna funkcija. Za slučaj prelaznog IIR filtra usvojeno je da karakteristična funkcija ima oblik

$$K_N(x) = x^K P_M(x) \frac{x_{z1}^2 - 1}{x^2 - x_{z1}^2} \frac{x_{z2}^2 - 1}{x^2 - x_{z2}^2} \dots \frac{x_{zL}^2 - 1}{x^2 - x_{zL}^2} \quad (3)$$

$$= x^K (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_M x^M) \frac{x_{z1}^2 - 1}{x^2 - x_{z1}^2} \dots \frac{x_{zL}^2 - 1}{x^2 - x_{zL}^2}$$

gde je $N = K + M$ red filtra, M je paran broj a $x_{z1}, x_{z2}, \dots, x_{zL}$ su nule prenosne funkcije koje se nalaze na jediničnom krugu. Kako bi komplementarna dekompozicija bila moguća neophodno je da je broj ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu isti. U [14] je pokazana komplementarna dekompozicija prelaznih filtara neparnog reda sa po jednim ekstremumom u propusnom i nepropusnom opsegu. U ovom radu će se razmatrati filtri čija karakteristika slabljenja ima po dva ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu, odnosno karakteristična funkcija će imati dve nule x_{z1} i x_{z2} .

Zamenom jednačine (3) u jednačinu (1) dobija se:

$$|H_N(x)|^2 = \frac{(x^2 - x_{z1}^2)^2 \dots (x^2 - x_{zL}^2)^2}{(x^2 - x_{z1}^2)^2 \dots (x^2 - x_{zL}^2)^2 + \varepsilon^2 x^{2K} (a_0 + \dots + a_M x^M)^2 (x_{z1}^2 - 1)^2 \dots (x_{zL}^2 - 1)^2} \quad (4)$$

Prenosna funkcija $H(z)$ može se odrediti tako što se smenom $x^2 = -s^2$, gde je $s = \sigma + j\omega$, prenosna funkcija preslika iz diskretnog u kontinualni prostor. U sledećem

D. Živaljević, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon:381-18-529-423; faks:381-18-588-399; e-mail:dragana.zivaljevic@elfak.ni.ac.yu).

V. Stojanović, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija(telefon:381-18-529-607; faks:381-18-588-399;e-mail:vidosav.stojanovic@elfak.ni.ac.yu).

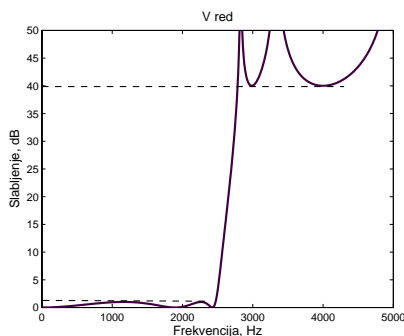
koraku aproksimacije određuje se prenosna funkcija koja zadovoljava specifikacije prelaznog IIR filtra. U poslednjem koraku aproksimacije se bilinearnom transformacijom dobija prenosna funkcija IIR filtra. U ovom radu je opisan postupak aproksimacije direktno u diskretnom prostoru, tako da je bilinearna transformacija nepotrebna.

Selekcijom polova prenosne funkcije koje se nalaze unutar jediničnog kruga dobija se prenosna funkcija filtra $H(z)$.

TABELA 1: KOEFICIJENTI PRENASNE FUNKCIJE NISKOFREKVENTNOG FILTRA ZA V, VII I IX RED ZA $R_s = 40\text{dB}$ I $R_p = 1\text{dB}$.

V red		VII red		IX red	
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
0.0815	1.0000	0.0383	1.0000	0.0142	1.0000
0.1965	-0.9085	0.1396	-1.0498	0.0765	-1.0976
0.3115	1.6970	0.2689	2.3681	0.1989	2.8300
0.3115	-1.0745	0.3766	-1.8235	0.3483	-2.3505
0.1965	0.6981	0.3766	1.7065	0.4585	2.6835
0.0815	-0.2329	0.2689	-0.8419	0.4585	-1.5623
		0.1396	0.3444	0.3483	0.9342
		0.0383	-0.0569	0.1989	-0.3147
				0.0765	0.0781
				0.0142	-0.0079

Na Sl.1 prikazana je karakteristika slabljenja, $a = 10 \log(1 + K_N^2(x))$ za peti red filtra. Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu iznosi $R_s = 40\text{dB}$ a maksimalno slabljenje u propusnom opsegu $R_p = 1\text{dB}$. Usvajeno je da je propusni opseg jednak polovini frekvencijskog opsega $F_s/2$. Može se uočiti da karakteristika slabljenja ima dva maksimuma u propusnom i dva minimuma u nepropusnom opsegu.



Sl.1. Karakteristika slabljenja niskopropusnog filtra V reda za $R_s = 40\text{dB}$ i $R_p = 1\text{dB}$.

Lako se može uočiti da funkcija slabljenja zadovoljava uslov da se granična frekvencija propusnog opsega filtra, $f_p = F_s/4$, preslikava u vrednost $x = 1$.

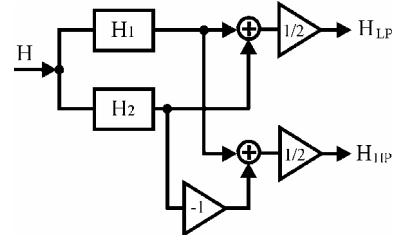
III. KOMPLEMENTARNA DEKOMPOZICIJA

Za komplementarnu dekompoziciju prenosne funkcije na paralelnu vezu dva fazna korektora H_1 i H_2 , kao što je prikazano na Sl.2, od značaja su prenosne funkcije istim brojem ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu.

Ovde su razmatrane funkcije sa dve proste nule na jediničnom krugu i dve oscilacije u propusnom opsegu. Ostale nule prenosne funkcije leže u $z = -1$. Navedene uslove ispunjava i prethodno opisana prenosna funkcija za $M = 4$. Ova prenosna funkcija u opsegu $|x| < 1$, odnosno za $f < f_p$, ima dva lokalna maksimuma. Ako je minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu jednako R_s , tada maksimalno slabljenje u propusnom opsegu mora imati vrednost

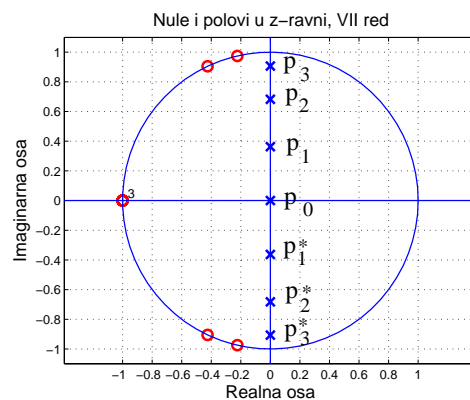
$$R_p = -10 \log(1 - 10^{-R_s/10}) \quad (5)$$

da bi minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu komplementarnih filtera imalo istu vrednost.



Sl.2. Komplementarna dekompozicija prenosne funkcije na dva fazna korektora H_1 i H_2 .

Na Sl.3 prikazan je raspored polova i nula za niskofrekvencijski filter sedmog reda koji je pogodan za komplementarnu dekompoziciju. Polovi se nalaze na imaginarnoj osi a nule na jediničnom krugu jer je propusni opseg jednak polovini frekvencijskog opsega.



Sl.3. Polovi i nule filtra VII reda.

Prenosne funkcije faznih korektora imaju oblik

$$H_1(z) = z^{\frac{N-1}{2}} \frac{D_1(1/z)}{D_1(z)} \quad (6)$$

i

$$H_2(z) = z^{\frac{N+1}{2}} \frac{D_2(1/z)}{D_2(z)} \quad (7)$$

Za prvi fazni korektor, usvaja se pol u koordinatnom početku, p_0 , i konjugovano-kompleksni par polova $p_2 - p_2^*$, dok se za drugi fazni korektor uzimaju konjugovano-kompleksni par polova $p_1 - p_1^*$ i $p_3 - p_3^*$. Dakle, $H_1(z)$ je fazni korektor trećeg reda dok je $H_2(z)$ fazni korektor četvrtog reda. U opštem slučaju, za fazni korektor $H_1(z)$ treba usvajati svaki drugi kompleksni par polova počevši

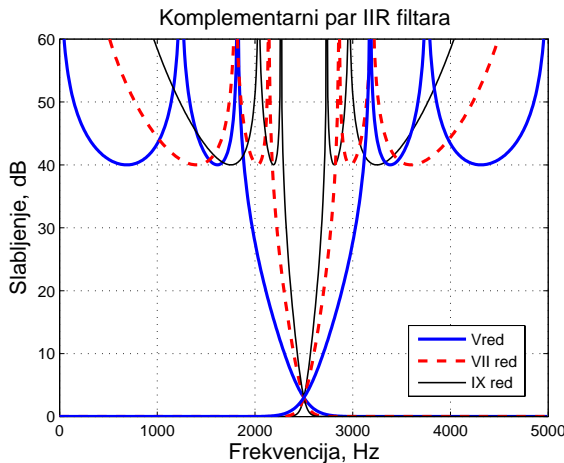
od pola u koordinatnom početku, p_0 . Preostali polovi formiraju fazni korektor $H_2(z)$.

Sabiranjem ove dve funkcije dobija se niskopropusni filter a oduzimanjem–visokopropusni filter kao što je prikazano na Sl.2.

IV. REZULTATI

Na Sl.4 prikazani su komplementarni parovi karakteristika slabljenja za peti, sedmi i deveti red gde je minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $R_s = 40$ dB dok je maksimalno slabljenje u propusnom opsegu $R_p = 0.0004$ dB, izračunato na osnovu jednačine (5). Za peti red usvojeno je $K = 1$, $M = 6$, za sedmi red je $K = 3$ i za deveti $K = 5$. Frekvencija odmeravanja je $F_s = 10$ kHz a na polovini frekvencijskog opsega $f_p = F_s / 4$, slabljenje iznosi 3 dB. Usvojen je neparni red filtra jer je komplementarna dekompozicija jednostavnija u odnosu na komplementarnu dekompoziciju prenosnih funkcija parnog reda.

U Tabeli 2 dati su koeficijenti prenosne funkcije niskofrekvencijskog filtra za peti, sedmi i deveti red u z^{-1} ravni, za vrednosti slabljenja $R_s = 40$ dB i $R_p = 0.0004$ dB.



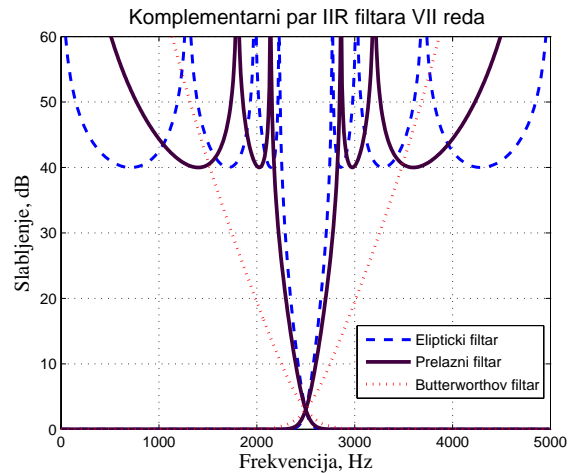
Sl.4. Karakteristike slabljenja niskopropusnih filtera i njihovih komplementarnih parova za peti, sedmi i deveti red gde je $R_s = 40$ dB i $R_p = 0.0004$ dB.

U Tabeli 3 date su prenosne funkcije faznih korektora za komplementarnu dekompoziciju petog, sedmog i devetog reda dobijene primenom jednačina (6) i (7).

Na Sl.5 izvršeno je poređenje karakteristike slabljenja za prelazni IIR filter sedmog reda sa Butterworthovim i Eliptičkim filtrom takođe sedmog reda gde se vidi da se karakteristika slabljenja prelaznog filtra (prikazanog punom linijom) nalazi između karakteristika slabljenja Butterworthovog (isprekidana linija) i Eliptičkog filtra (tačkasta linija). U odnosu na Butterworthov filter, prelazni filter ima znatno bolju selektivnost, dok u odnosu na Eliptički, selektivnost je lošija. Treba imati u vidu da Eliptički filter unosi najveća fazna izobličenja u odnosu na ostale dve aproksimacije.

TABELA 3: PRENASNE FUNKCIJE FAZNIH KOREKTORA ZA KOMPLEMENTARNU DEKOMPOZICIJU V, VII I IX REDA.

red	H_1	H_2
V	$\frac{0.2110z^2 + 1}{z^2 + 0.2100}$	$\frac{0.6856z^2 + 1}{z^3 + 0.6856z}$
VII	$\frac{0.1083z^4 + 0.9541z^2 + 1}{z^4 + 0.9541z^2 + 0.1083}$	$\frac{0.4656z^2 + 1}{z^3 + 0.4656z}$
IX	$\frac{0.04473z^4 + 0.6854z^2 + 1}{z^4 + 0.6854z^2 + 0.04473}$	$\frac{0.2624z^4 + 1.1790z^2 + 1}{z^5 + 1.1790z^2 + 0.2624z}$



Sl.5. Karakteristike slabljenja komplementarnog para prelaznog IIR filtra VII reda u odnosu na Butterworthov i Eliptički filter istog reda za $R_s = 40$ dB i $R_p = 0.0004$ dB.

TABELA 2: KOEFICIJENTI PRENASNE FUNKCIJE NISKOFREKVENTNOG FILTRA ZA V, VII I IX RED ZA $R_s = 40$ dB I $R_p = 0.0004$ dB.

V red		VII red		IX red	
b	a	b	a	b	a
0.1055	1.0000	0.0542	1.0000	0.0224	1.0000
0.3428	0.0000	0.2328	0.0000	0.1312	0.0000
0.5723	0.8966	0.5023	1.4197	0.3690	1.8641
0.5723	0.0000	0.7221	0.0000	0.6793	0.0000
0.3428	0.1447	0.7221	0.5526	0.9098	1.1150
0.1055	0.0000	0.5023	0.0000	0.9098	0.0000
		0.2328	0.0504	0.6793	0.2326
		0.0542	0.0000	0.3690	0.0000
				0.1312	0.0117
				0.0224	0.0000

V. ZAKLJUČAK

Izvršena je direktna sinteza prelaznih IIR filtera sa svim nulama prenosa na jediničnom krugu, koji su pogodni za komplementarnu dekompoziciju. Karakteristika slabljenja u propusnom opsegu filtra varira između maksimalno ravne i mini-max karakteristike. Njegova prenosna funkcija se može rastaviti na dva fazna korektora na osnovu kojih se formiraju prenosne funkcije komplementarnog para – niskofrekventnog i visokofrekventnog filtra.

Izložen je postupak za komplementarnu dekompoziciju prenosnih funkcija sa dve proste kompleksne nule na jediničnom krugu i višestrukum nulom u $z = -1$. Ove

prenosne funkcije imaju po dve oscilacije u propusnom i nepropusnom opsegu. Međutim, komplementarnu dekompoziciju je moguće izvršiti i za prenosne funkcije sa više oscilacija ali je neophodno ispuniti uslov da je jednak broj oscilacija u propusnom i nepropusnom opsegu. Prednost ovih filtara je da imaju smanjenu osetljivost na promenu dužine digitalne reči.

LITERATURA

- [1] P. Vaidyanathan, P.Regalia, S.Mitra: "Design of doubly-complementary IIR digital filters using a single complex allpass filter with multirate applications", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.34, no.4, April 1987, pp. 378-389.
- [2] P.Vaidyanathan, S.Mitra, Y.Neuvo: "A new approach to the realization of low-sensitivity IIR digital filters", IEEE Trans. on Acoustic and Signal Processing, vol.34, no.2, April 1986, pp. 350-361.
- [3] Phillip Regalia and Sanjit Mitra: "Tree-structured complementary filter banks using all-pass sections", IEEE Tran. on Circuits and Systems, vol.cas-34, Dec.1987, no.12, pp.1470-1484.
- [4] Ivan Selesnick: "Low-pass filters realizable as all-pass sums: design via a new flat delay filter", IEEE Trans. on Circuits and Systems-II Analog and Digital Signal Processing, vol.46, no.1, January 1999, pp. 40-50.
- [5] Ljiljana Milić and Tapio Saramaki: "Power-complementary IIR filter pairs with an adjustable crossover frequency", in Proc. FACTA UNIVERSITATIS, Elec.Energ. vol.16, Dec.2003, pp. 295-304.
- [6] Ljiljana Milić and M. Lutovac: "Design of multiplierless elliptic IIR with a small quantization error", IEEE Trans. Signal Processing, vol.47, No.2, Feb.1999, pp. 469-479.
- [7] Ljiljana Milić and M.Lutovac: "Efficient multirate filtering using EMQF subfilters", in Proc. TELSIS 2003, Serbia and Montenegro, Niš, October 1-3, 2003, pp.301-304.
- [8] G.Stančić and D.Ilić: "Uskopojasni rekurzivni digitalni filter nepropusnik frekvencija", 14th Telecommunications forum TELFOR 2006, Serbia, Belgrade, November 21-23, 2006, pp. 337-340.
- [9] Tapio Saramaki and M. Renfors: "A novel approach for the design IIR filters as a tapped cascaded inter-connection of identical allpass subfilters", in Proc. 1987 IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (Philadelphia, Pennsylvania), vol.2, May 1987, pp. 629-632.
- [10] H.Johansson and T.Saramaki: "A class of complementary IIR filters", in Proc. 1999 IEEE Int. Symp. Circuits, Elec.Energ. vol.16, Dec.2003, pp. 295-304.
- [11] A.Vazquez and G.Dolecek: "Design of linear phase IIR filters with flat magnitude response using complex coefficients allpole filters", Computacion y Sistemas, vol.10, no.4, 2007, ISSN 1405-5546, pp. 335-356.
- [12] A.Vazquez and G.Dolecek: "Design of complex allpass filters", in Proc. 1999 IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP 2004), vol.II, Montreal, Canada, May.2004, pp. 393-396.
- [13] R.Koilpillai, P.Vaidyanathan, S.Mitra: "On arbitrary-level IIR and FIR filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.37, no.2, February 1990, pp. 280-284.
- [14] Dragana U. Živaljević, Vidosav Stojanović: "Direktna sinteza IIR filtara pogodna za komplementarnu dekompoziciju", 52. konferencija ETRAN, 8-12 jun 2008. Palić, Srbija, Elektronski zbornik radova, CD-EK.1.1.

ABSTRACT

Direct synthesis of recursive IIR digital filters with transient characteristic function is presented in this paper. The attenuation characteristic in passband is positioned in area between Butterworth and Elliptic attenuation characteristics. All transfer function zeros are placed at the unit circle which is necessary condition for complementary decomposition. The complementary decomposition of this transfer function into parallel connection of allpass filters is done. Then the lowpass filter transfer function is obtained by this two allpass filters addition and his complementary, highpass filter, is obtained by allpass filters subtraction. The advantage of these filters is sensitivity decreasing to digital word length changing.

ODD ORDER IIR FILTERS SUITABLE FOR COMPLEMENTARY DECOMPOSITION DIRECT SYNTHESIS

Dragana Živaljević, Vidosav Stojanović