Statističke karakteristike izlaznog signala ASK sistema u prisustvu Gausovog šuma, interferencije i Nakagami-m fedinga

Miloš Banđur, Đoko Banđur, Anđelija Raičević

***Sadržaj* — U ovom radu analizira se jedan ASK (Amplitude Shift Keyed) sistem sa nekoherentnom detekcijom signala. Na ulazu u prijemnik prisutni su signal, interferencija i Gausov šum. Amplitude signala i interferencije su promenljive sa Nakagami-m raspodelom. Faza interfencije je promenljiva sa uniformnom raspodelom. Odredićemo funkciju gustine verovatnoće (PDF – probability density function) anvelope sume signala, interferencije i Gausovog šuma, kao i kumulativnu funkciju raspodele verovatnoće (CDF – cumulative ditribution function), karakterističnu funkciju (MGF – moment-generating function) i moment n-tog reda pomenute anvelope.**

***Ključne reči* — ASK, CDF, Gausov šum, funkcija gustine verovatnoće, interferencija, MGF, moment, Nakagami-m raspodela.**

I. Uvod

TEMA ovog rada je statistička analiza ASK (Amplitude Shift Keyed) sistema sa nekoherentnim prijemnikom u prisustvu interferencije, Gausovog šuma i fedinga. Analiziraćemo slučaj kada promene amplitude signala i interferencije odgovaraju Nakagami-m raspodeli, dok je faza interferencije promenljiva sa uniformnom raspodelom. U radu ćemo najpre odrediti funkciju gustine verovatnoće anvelope sume signala, interferencije i Gausovog šuma, a zatim i odgovarajuću kumulativnu funkciju raspodele verovatnoće (CDF) pomenute anvelope, njenu karakterističnu funkciju (MGF), kao i moment n-tog reda. Detaljan pregled, statistička analiza, i poređenje performansi sistema za koherentnu i nekoherentnu detekciju signala u prisustvu fedinga data je u [1], dok je statistička analiza ASK signala u prisustvu fedinga detaljno izložena u [2]. U delu II, predstavljen je model analiziranog sistema, dok je u delu III izveden izraz za funkciju gustine verovatnoće anvelope sume signala, interferencije i Gausovog šuma, a prikazana je i grafička interpretacija iste. U delu IV, izvedeni su izrazi za kumulativnu funkciju raspodele verovatnoće, MGF funkciju kao i moment n-tog reda pomenute anvelope.

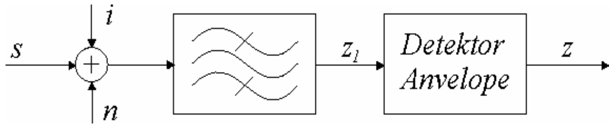
M. Banđur, Fakultet Tehničkih Nauka u K. Mitrovici, Kneza Miloša 7, 38220 K. Mitrovica, Srbija, bandjo@ptt.yu

Đ. Banđur, Fakultet Tehničkih Nauka u K. Mitrovici, Kneza Miloša 7, 38220 K. Mitrovica, Srbija.

A. Raičević, Fakultet Tehničkih Nauka u K. Mitrovici, Kneza Miloša 7, 38220 K. Mitrovica, Srbija.

II. Model sistema

Model nekoherentnog prijemnika koji se analizira u ovom radu prikazan je na Sl. 1. Prijemnik se sastoji iz uskopojasnog filtera i detektora anvelope.



Sl. 1. Nekoherentni ASK prijemnik

Signal na izlazu iz filtera može se predstaviti izrazom:

$$z_1 = A\cos\omega t + A_1\cos(\omega t + \theta) + x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

pri čemu su amplitude signala i interferencije A i A_1 promenljive sa Nakagamijevom raspodelom:

$$p_A(A) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m A^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}A^2}\, dA,\ A \ge 0 \qquad (1)$$

$$p_{A_1}(A_1) = \frac{2}{\Gamma(m_1)}\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1} A_1^{2m_1-1} e^{-\frac{m_1}{\Omega_1}A_1^2}\, dA_1,\ A_1 \ge 0 \quad (2)$$

Raspodela faze interferencije θ je unifromna i predstavljena je izrazom: $p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $|\theta| \le \pi$.

Slučajne promenljive x i y su međusobno nezavisne Gausove promenljive sa srednjom vrednošću jednakom nuli i varijansom σ^2 .

III. Funkcija gustine verovatnoće izlaznog signala

Izvešćemo izraz za funkciju gustine verovatnoće anvelope sume signala, interferencije i uskopojasnog Gausovog šuma [1]:

$$z = A\cos\omega t + A_1\cos(\omega t + \theta) + x\cos\omega t + y\sin\omega t \qquad (3)$$

$$z = r\cos(\omega t + \varphi)$$

Slučajne promenljive r i φ predstavljaju anvelopu i fazu slučajnog procesa z na izlazu is detektora anvelope. Iz prethodnog izraza sledi:

$$x + A + A_1\cos\theta = r\cos\varphi,\ \ y - A_1\sin\theta = r\sin\varphi \qquad (4)$$

$$x = r\cos\varphi - A_1\cos\theta - A,\ \ y = r\sin\varphi + A_1\sin\theta$$

Anvelopa i faza procesa z su:

$$r=\sqrt{(x+A+A_1\cos\theta)^2+(y-A_1\sin\theta)^2} \tag{5}$$

$$tg\varphi=\frac{y-A_1\sin\theta}{x+A+A_1\cos\theta}$$

dok je Jakobijan transformacije iz x i y u r i φ:

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=r$$

Združena funkcija gustine verovatnoće Gausovih slučajnih promenljivih x i y data je sledećim izrazom [2]:

$$p_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

Na osnovu (2), (3) i (4) sledi:

$$p_{r\varphi}(r,\varphi/\theta)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(r\cos\varphi-A-A_1\cos\theta)^2+(r\sin\varphi+A_1\sin\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_{r\varphi}(r,\varphi/\theta)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2+A^2+A_1^2-2rA\cos\varphi+2AA_1\cos\theta-2rA_1\cos(\varphi+\theta)}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

Dalje, na osnovu formule $e^{\alpha\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n(\alpha)\cos n\varphi$ [3], sledi:

$$p_{r\varphi}(r,\varphi/\theta)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2+A^2+A_1^2}{2\sigma^2}}\times$$
$$\times e^{-\frac{2AA_1\cos\theta-2rA\cos\varphi-2rA_1\cos(\varphi+\theta)}{2\sigma^2}}$$

$$p_{r\varphi}(r,\varphi/\theta)=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2+A^2+A_1^2}{2\sigma^2}}\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}I_{k_1}\left(\frac{rA}{\sigma^2}\right)\cos k_1\varphi\times$$
$$\times\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}I_{k_2}\left(-\frac{AA_1}{\sigma^2}\right)\cos k_2\theta\sum_{k_3=-\infty}^{\infty}I_{k_3}\left(\frac{rA_1}{\sigma^2}\right)\cos k_3(\varphi+\theta)$$

Usrednjavanjem prethodnog izraza po θ, a zatim i integraljenjem istog po φ dobijamo sledeći izraz za funkciju gustine verovatnoće anvelope r:

$$p_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2+A^2+A_1^2}{2\sigma^2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}I_k\left(\frac{rA}{\sigma^2}\right)I_k\left(-\frac{AA_1}{\sigma^2}\right)I_k\left(\frac{rA_1}{\sigma^2}\right)$$

$$p_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2+A^2+A_1^2}{2\sigma^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k I_k\left(\frac{rA}{\sigma^2}\right)I_k\left(-\frac{AA_1}{\sigma^2}\right)I_k\left(\frac{rA_1}{\sigma^2}\right) \tag{8}$$

gde je $\varepsilon_k=1$ za $k=0$ i $\varepsilon_k=2$ za $k>0$.

Daljim usrednjavanjem (8) po A i A_1, sledi:

$$p_r(r)=\int_0^\infty dA\int_0^\infty p_{r/AA_1}(r/AA_1)p_A(A)p_{A_1}(A_1)dA_1$$

Imajući u vidu da su funkcije $p_A(A)$ i $p_{A_1}(A_1)$ napred definisane izrazima (1) i (2), respektivno, kao i da se modifikovane Beselove funkcije mogu transformisati na sledeći način [3]:

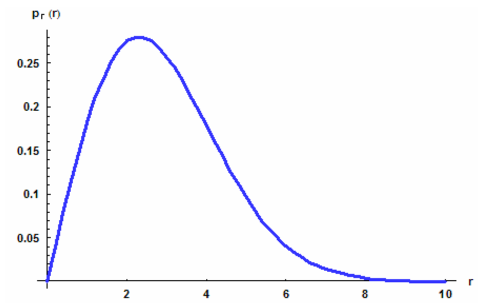
$$I_k(x)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{x^{2h+k}}{2^{2h+k}\cdot h!\,\Gamma(k+h+1)}$$

sledi:

$$p_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\frac{4}{\Gamma(m)\Gamma(m_1)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\sum_{h=0}^{\infty}\frac{r^{2h+k}}{\sigma^{4h+2k}}\frac{1}{2^{2h+k}h!\Gamma(h+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{r^{2i+k}}{\sigma^{4i+2k}}\frac{1}{2^{2i+k}i!\Gamma(i+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4j+2k}}\frac{(-1)^{2j+k}}{2^{2j+k}j!\Gamma(j+k+1)}\times$$
$$\times\int_0^\infty A^{2(h+k+j+m)-1}e^{-\left(\frac{m}{\Omega}+\frac{1}{2\sigma^2}\right)A^2}dA\times$$
$$\times\int_0^\infty A_1^{2(i+k+j+m_1)-1}e^{-\left(\frac{m_1}{\Omega_1}+\frac{1}{2\sigma^2}\right)A_1^2}dA_1 \tag{9}$$

Odnosno, daljim sređivanjem (9), dolazimo do konačnog izraza za funkciju gustine verovatnoće anvelope r u zatvorenom obliku:

$$p_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(m_1)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\sum_{h=0}^{\infty}\frac{r^{2h+k}}{\sigma^{4h+2k}}\frac{1}{2^{2h+k}h!\Gamma(h+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{r^{2i+k}}{\sigma^{4i+2k}}\frac{1}{2^{2i+k}i!\Gamma(i+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4j+2k}}\frac{(-1)^{2j+k}}{2^{2j+k}j!\Gamma(j+k+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{2\Omega\sigma^2}{2m\sigma^2+\Omega}\right)^{h+k+j+m}\left(\frac{2\Omega_1\sigma^2}{2m_1\sigma^2+\Omega_1}\right)^{i+k+j+m_1}\times$$
$$\times\Gamma(h+k+j+m)\Gamma(i+k+j+m_1) \tag{10}$$



Sl. 2. Funkcija gustine verovatnoće anvelope r, $(\sigma=2, m=m_1=1, \Omega=\Omega_1=1)$

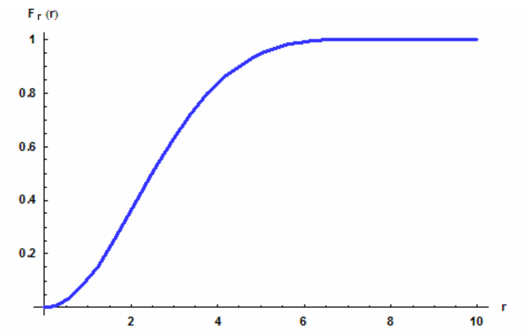
Na Sl.2 prikazana je funkcija raspodele gustine verovatnoće trenutnih vrednosti anvelope sume uskopojasnog korisnog signala, interferencije i Gausovog šuma.

IV. CDF, MGF, MOMENT

Kumulativna funkcija raspodele verovatnoće anvelope r je:

$$F_r(r)=\int_0^r p_r(x)dx$$

$$F_r(r)==\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(m_1)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4h+2k}}\frac{1}{2^{2h+k}h!\Gamma(h+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4i+2k}}\frac{1}{2^{2i+k}i!\Gamma(i+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4j+2k}}\frac{(-1)^{2j+k}}{2^{2j+k}j!\Gamma(j+k+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{2\Omega\sigma}{2m\sigma^2+\Omega}\right)^{h+k+j+m}\left(\frac{2\Omega_1\sigma}{2m_1\sigma^2+\Omega_1}\right)^{i+k+j+m_1}\times$$
$$\times\Gamma(h+k+j+m)\Gamma(i+k+j+m_1)\times$$
$$\times\int_0^r x^{2i+2h+2k+1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (11)$$



Sl. 3. CDF funkcija anvelope r
$(\sigma=2, m=m_1=0.5, \Omega=\Omega_1=0.5)$

Na Sl.3 prikazana je kumulativna funkcija raspodele gustine verovatnoće trenutnih vrednosti anvelope sume uskopojasnog korisnog signala, interferencije i Gausovog šuma.

MGF funkcija anvelope r je:

$$M_r(s)=\int_0^{\infty}e^{-sr}p_r(r)dr$$

$$M_r(s)=\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(m_1)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4h+2k}}\frac{1}{2^{2h+k}h!\Gamma(h+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4i+2k}}\frac{1}{2^{2i+k}i!\Gamma(i+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4j+2k}}\frac{(-1)^{2j+k}}{2^{2j+k}j!\Gamma(j+k+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{2\Omega\sigma}{2m\sigma^2+\Omega}\right)^{h+k+j+m}\left(\frac{2\Omega_1\sigma}{2m_1\sigma^2+\Omega_1}\right)^{i+k+j+m_1}\times$$
$$\times\Gamma(h+k+j+m)\Gamma(i+k+j+m_1)\times$$
$$\times\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-s)^t}{t!}\left(2\sigma^2\right)^{i+h+k+t/2+1}\Gamma(i+h+k+t/2+1) \qquad (12)$$

Moment n-tog reda anvelope r je:

$$m_n=\int_0^{\infty}r^n p_r(r)dr$$

$$m_n=\frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(m_1)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m\left(\frac{m_1}{\Omega_1}\right)^{m_1}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4h+2k}}\frac{1}{2^{2h+k}h!\Gamma(h+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4i+2k}}\frac{1}{2^{2i+k}i!\Gamma(i+k+1)}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{4j+2k}}\frac{(-1)^{2j+k}}{2^{2j+k}j!\Gamma(j+k+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{2\Omega\sigma}{2m\sigma^2+\Omega}\right)^{h+k+j+m}\left(\frac{2\Omega_1\sigma}{2m_1\sigma^2+\Omega_1}\right)^{i+k+j+m_1}\times$$
$$\times\Gamma(h+k+j+m)\Gamma(i+k+j+m_1)\times$$
$$\times(2\sigma^2)^{i+h+k+n/2+1}\Gamma(i+h+k+n/2+1) \qquad (13)$$

LITERATURA

[1] Marvin K. Simon, Mohamed-Slim Alouni, *Digital Communication over Fading Channels.* John Wiley&Sons, Inc., 2000.

[2] Mihajlo Č. Stefanović, *Detekcija signala u belom i obojenom Gausovom šumu*, Monografija, Univerzitet u Nisu, 1999.

[3] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.) Modified Bessel Functions I and K, §9.6 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing.* New York: Dover, 1972.

ABSTRACT

In this paper an ASK (Amplitude Shift Keyed) system with non-coherent signal detection is considered. Signal, interference and Gaussian noise are present at the receiver entry. Amplitudes of the input signal and interference are random processes with Nakagami-m distribution. The interference phase is a random process with uniform distribution. We will determinate probability density functions of the envelope representing sum of the signal, interference and Gaussian noise, cumulative distribution function (CDF), moment-generating function (MGF) as well as appropriate envelope moment (m_n).

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE OUTPUT SIGNAL OF THE ASK SYSTEM IN THE PRESENCE OF INTERFERENCE, GAUSSIAN NOISE AND NAKAGAMI-m FADING

Miloš Banđur, Đoko Banđur, Anđelija Raičević