

# Uticaj nesavršenog kofaziranja na performanse MRC prijemnika QPSK signala u kanalu sa Weibullovim fedingom

Goran T. Đorđević<sup>1</sup>, Bojana Z. Nikolić<sup>1</sup>, Aleksandra M. Cvetković<sup>1</sup>, Milan S. Marković<sup>2</sup>

**Sadržaj** — U radu je analiziran rad MRC (*Maximum Ratio Combining*) prijemnika QPSK (*Quaternary Phase-Shift Keying*) signala koji se prostiru kroz kanal sa Weibullovim fedingom. Određeni je uticaj nesavršenog kofaziranja i nebalansiranosti grana prijemnika na zavisnost verovatnoće greške po bitu od odnosa srednjih snaga signala i šuma u kanalu. Takođe je analiziran uticaj broja prijemnih antena i dubine fedinga na performanse sistema.

**Ključne reči** — Diverziti sistemi, feding, kofaziranje, verovatnoća greške.

## I. UVOD

Da bi se smanjio uticaj *multipath* fedinga na detekciju signala, na prijemu je moguće koristiti prostorno razdvojene prijemne antene i na određene načine kombinovati signale iz različitih grana prijemnika. Optimalna tehnika kombinovanja je MRC (*Maximum Ratio Combining*). Kod ove tehnike kombinovanja vrši se izjednačavanje faza korisnih signala u svim granama, množenje primljenog signala u svakoj grani procenjenom anvelopom ovog signala i sabiranje prijemnih signala sa svih antena [1]. Izjednačavanjem faza eliminišu se slučajne promene faza signala nastale u toku prenosa. Da bi se izvršilo izjednačavanje faza potrebno je da se proceni faza prijemnog signala. Ova procena faze prijemnog signala vrši se iz prijemnog modulisanog ili nemodulisanog nosioca.

U dosadašnjim radovima u vezi sa ovom problematikom uglavnom su korišćene pretpostavke o idealnoj proceni faze dolazećeg signala, npr. [2], [3]. Jedino je u radovima [4], [5] razmatran uticaj nesavršene procene faze primljenog signala, i to na performanse EGC (*Equal Gain Combining*) prijemnika. U radu [4] razmatran je uticaj fazne greške na vrednosti verovatnoće greške pri detekciji digitalnih binarnih (BPSK – *Binary Phase-Shift Keying*) i kvaternarnih (QPSK – *Quaternary Phase-Shift Keying*) fazno modulisanih signala, koja je izračunata primenom Gram-Charlierovog razvoja. Analiza je urađena pod pretpostavkom da je na prijemnim antenama prisutan nekorelisani Rayleighev feding. U radu [5] izvedeni su izrazi u zatvorenom obliku za određivanje verovatnoće

prekida i verovatnoće greške, pri detekciji BPSK i QPSK signala u slučaju kada je na prijemnim antenama prisutan korelisani Nakagami-*m* feding. Posmatrana je EG tehnika kombinovanja sa dve grane. U oba rada analiza sistema je urađena pod pretpostavkom da su grane prijemnika balansirane. Međutim, kao što je poznato [6] u praksi vrlo retko su propagacioni putevi svih grana identični. Takođe, i elektronske komponente u različitim granama prijemnika nisu savršene. Zbog toga je od interesa da se razmotri i uticaj nebalansiranosti grana prijemnika na performanse sistema.

U ovom radu analiziran je prijem QPSK signala koji se prostiru kroz kanal sa Weibullovim fedingom. U prijemniku se koristi MR tehnika kombinovanja, pri čemu su grane prijemnika nebalansirane. Procena faze prijemnog signala vrši se iz nemodulisanog nosioca i nije idealna. Razlika između faze dolazećeg signala i procenjene faze signala je slučajni proces koji ima Tikhonovljevu funkciju gustinu verovatnoće [4], [5], [7]. Pokazano je u kojoj meri nesavršena procena faze utiče na vrednosti verovatnoće greške po bitu.

## II. ANALIZA SISTEMA

Weibullova raspodela vrlo često se koristi za modelovanje fedinga u urbanim sredinama u slučajevima kada je Rayleigheva raspodela neadekvatna. Ova raspodela je empirijska i originalno je korišćena kao statistički model za analizu pouzdanosti sistema [8], [9]. U radu [8] pokazano je da Weibullova raspodela daje dobro poklapanje sa rezultatima merenja kod DECT (*digital enhanced cordless telecommunications*) sistema koji rade na 1.98 GHz. Takođe, rezultati merenja na 900 MHz prezentovani u radu [9] pokazuju da se ova raspodela može koristiti i kao model *multipath* fedinga u *outdoor* sredinama. Model fedinga sa Weibullovom raspodelom podrazumeva signal koji se sastoji od grupe *multipath* talasa u nehomogenoj sredini. Rezultujuća anvelopa dobija se kao nelinearna funkcija modula sume *multipath* komponenti.

Signal na *i*-toj anteni prijemnika (Sl. 1) može se predstaviti u obliku

$$s_i(t) = r_i(t) e^{j\varphi_i(t)} \cdot A e^{j\theta_i} + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (1)$$

gde je  $r_i(t)$  anvelopa fedinga,  $\varphi_i(t)$  je slučajni pomeraj faze nastao pri prolasku signala kroz kanal sa fedingom. Feding na svakoj anteni je frekvencijski neselektivan, u toku jednog simbola se ne menja, nezavisan je od simbola do

<sup>1</sup>Goran T. Đorđević, Bojana Z. Nikolić i Aleksandra M. Cvetković, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš.

<sup>2</sup>Milan S. Marković, Republika Srbija, Ministarstvo finansija, Poreska uprava – Centrala, Beograd, Save Miškovića, 3-5.

simbola  $i$  ne postoji korelacija između fedinga na različitim antenama. Funkcija gustine verovatnoće anvelope fedinga u  $i$ -toj grani prijemnika je Weibullova [10]

$$p_{r_i}(r_i) = \frac{\alpha_i}{\Omega_i} r_i^{\alpha_i-1} \cdot \exp(-r_i^2/\Omega_i), \quad r_i \geq 0 \quad (2)$$

gde je  $\alpha$  parametar fedinga, a  $\Omega_i = E\{r_i^{\alpha_i}\}$ , pri čemu je  $E\{\cdot\}$  oznaka za matematičko očekivanje. Može se pokazati da za  $n$ -ti moment važi [10]

$$E\{r_i^n\} = \Omega_i^{n/\alpha_i} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha_i}\right), \quad (3)$$

gde je  $\Gamma(\cdot)$  Gamma funkcija [11, izraz (8.310/1)]. Amplituda korisnog signala je označena sa  $A$  i može se pretpostaviti bez gubitka opštosti da je jednaka jedinici. Sa  $\phi_n$  je označena faza signala u kojoj je zapisana informacija o poslatom simbolu, koja u slučaju QPSK signala može imati jednu iz sledećeg skupa vrednosti:  $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ . Ako se uzme da je srednje kvadratna vrednost anvelope signala jednaka jedinici

$$E\{r_i^2\} = 1 = \Omega_i^{2/\alpha_i} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha_i}\right), \quad (4)$$

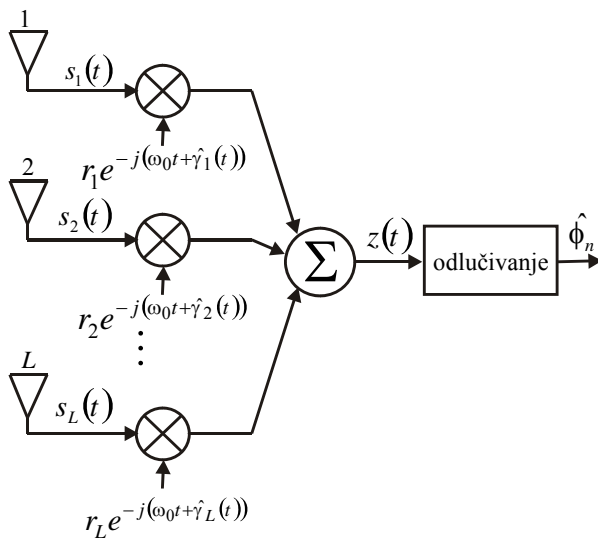
onda je

$$\Omega_i = \left(1/\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha_i}\right)\right)^{\alpha_i/2}. \quad (5)$$

Gaussov šum nulte srednje vrednosti i varijanse  $\sigma_i^2$  u  $i$ -toj grani prijemnika označen je sa  $n_i(t)$ . Standardna devijacija ovog Gaussovog šuma data je pomoću

$$\sigma_i = \sqrt{E\{r_i^2\} / [2 \log_2 M 10^{\gamma_{bi}} \exp(-\delta(i-1))]}, \quad (6)$$

gde je  $M$  broj faznih nivoa,  $\delta$  je koeficijent debalansiranosti, a  $\gamma_{bi}$  je odnos srednjih snaga signala i šuma po bitu u  $i$ -toj grani prijemnika izražen u decibelima.



Sl. 1. Model MRC prijemnika.

Posle izjednačavanja faza signala i množenja signala procenjenom anvelopom signala u svim granama,

rezultujući signal posle kombinovanja je

$$z(t) = \sum_{i=1}^L (A \cdot r_i^2(t) e^{j\phi_n} \cdot e^{j\varphi_i(t)} + n_i(t)), \quad (7)$$

gde je  $L$  broj grana prijemnika,  $r_i(t)$  je anvelopa fedinga u  $i$ -toj grani. Razlika između faze primljenog signala  $\gamma_i(t)$  u  $i$ -toj grani prijemnika i procenjene faze  $\hat{\gamma}_i(t)$  u toj grani prijemnika označena je sa  $\varphi_i(t) = \gamma_i(t) - \hat{\gamma}_i(t)$ . Ako se procena faze vrši pomoću fazne petlje iz nedomulisanog nosioca i ako je u kolu fazne petlje prisutan samo Gaussov šum, funkcija gustine verovatnoće ove fazne greške je [4], [5], [7]

$$p_{\varphi_i}(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp(\zeta_i \cdot \cos(\varphi_i))}{I_0(\zeta_i)}, \quad -\pi < \varphi_i \leq \pi, \quad (8)$$

gde je  $I_0(x)$  modifikovana Besselova funkcija prve vrste nultog reda argumenta  $x$  [11, izraz (8.406)],  $\zeta_i$  je odnos signal-šum u kolu fazne petlje u  $i$ -toj grani prijemnika, koji se može izraziti preko varijanse fazne greške  $\sigma_{\varphi_i}^2$  [4], [5], [7]

$$\zeta_i = 1/\sigma_{\varphi_i}^2. \quad (9)$$

Posle analize rada prijemnika i matematičkog sređivanja može se pokazati da je verovatnoća greške po bitu pri detekciji QPSK signala za diverziti sistem drugog reda data izrazom

$$BER = 0.25 \int \int \int \int \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{\sum_{i=1}^2 r_i^2 \cos(\pi/4 - \varphi_i)}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{\sum_{i=1}^2 r_i^2 \cos(\pi/4 + \varphi_i)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right\} \times p_{\varphi_1}(\varphi_1) p_{\varphi_2}(\varphi_2) p_{r_1}(r_1) p_{r_2}(r_2) d\varphi_1 d\varphi_2 dr_1 dr_2, \quad (10)$$

gde je  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  komplementarna funkcija greške [11, izraz (7.1.2.)],  $p_{\varphi_1}(\varphi_1)$  i  $p_{\varphi_2}(\varphi_2)$  su funkcije gustine verovatnoće fazne greške u prvoj i drugoj grani,  $p_{r_1}(r_1)$  i  $p_{r_2}(r_2)$  su funkcije gustine verovatnoće anvelope fedinga u prvoj i drugoj grani, a

$$\sigma = \sqrt{r_1^2 \sigma_1^2 + r_2^2 \sigma_2^2}. \quad (11)$$

Slično se mogu dobiti i izrazi za verovatnoću greške po bitu za diverziti sisteme višeg reda.

### III. NUMERIČKI REZULTATI

Numerički rezultati su dobijeni na dva načina – primenom numeričke integracije i primenom Monte Carlo simulacija. Da bi se dobila zavisnost verovatnoće greške po bitu pri detekciji QPSK signala potrebno je izvršiti numeričku integraciju u izrazu (10). Kao što se vidi, ako se radi o MRC prijemniku sa dve grane javlja se četvorostruka numerička integracija. Numerička integracija je izvršena primenom kvadraturnih formula Gaussovog tipa uz povećavanje broja čvorova dok se ne postigne prethodno zadata tačnost. U Monte Carlo simulacijama korišćeno je maksimalno  $2^{31}-1$  simbola,

minimalan broj simbola koji je korišćen prilikom procene bilo koje vrednosti verovatnoće greške je  $10^4$ , a kriterijum izlaska iz petlje je 4000 grešaka. U cilju jasnijeg prikaza rezultata uzeto je da su parametri Weibullove raspodele fedinga i standardne devijacije fazne greške u svim granama isti:  $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_L$ ,  $\sigma_{\varphi_1}=\sigma_{\varphi_2}=\dots=\sigma_{\varphi_L}$ . Odnos srednjih snaga signala i šuma po bitu u prvoj grani prijemnika označen je sa  $\gamma_{b_1}=\gamma_b$ .

Na Sl. 2 prikazan je uticaj devijacije faznog šuma na vrednosti verovatnoće greške po bitu pri detekciji QPSK signala. Za srednje vrednosti  $\gamma_b$ , sa povećanjem  $\gamma_b$  smanjuje se BER. Za velike vrednosti  $\gamma_b$ , sa povećanjem  $\gamma_b$ , BER ostaje konstantno. Ova neotklonjiva verovatnoća greške zavisi od vrednosti standardne devijacije faznog šuma. Recimo, ako se  $\sigma_\varphi$  poveća od  $12.5^\circ$  do  $20^\circ$  neotklonjiva verovatnoća greške se poveća od  $2.8 \cdot 10^{-5}$  do  $4.5 \cdot 10^{-3}$ .

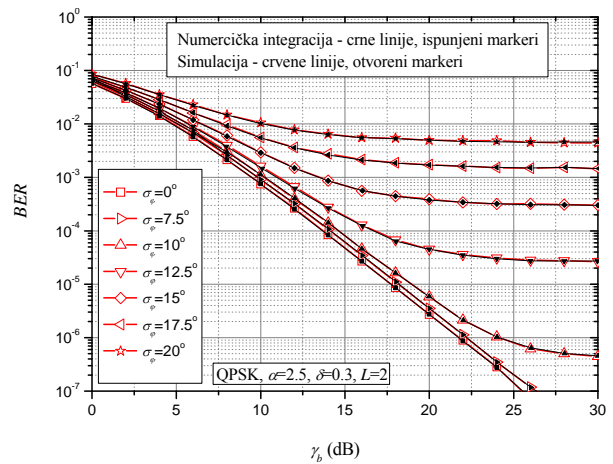
Uticaj standardne devijacije faznog šuma na verovatnoću greške po bitu još jasnije se vidi sa Sl. 3. Očigledno je da je QPSK modulacioni format znatno osetljiv na uticaj fazne greške. Vrednosti BERa počinju da rastu već za  $\sigma_\varphi$  oko  $8^\circ$ .

Na Sl. 4 prikazan je uticaj faktora nebalansiranosti na performanse sistema. Pri malim i srednjim vrednostima  $\gamma_b$ , faktor nebalansiranosti  $\delta$  u značajnoj meri utiče na vrednosti BERa. Recimo, za  $\sigma_\varphi=15^\circ$ , da bi se postigla BER od  $10^{-3}$  potrebno je obezbediti  $\gamma_b=12.8$  dB u slučaju da se radi o savršenoj balansiranoj prijemniku, dok je za  $\delta=2$  potrebno obezbediti  $\gamma_b=19.2$  dB. Za velike vrednosti  $\gamma_b$  javlja se BER floor čija vrednost ne zavisi od vrednosti  $\delta$  - sve krive se stapaju u jednu. Za  $\sigma_\varphi=15^\circ$  neotklonjiva greška iznosi  $3.2 \cdot 10^{-4}$ .

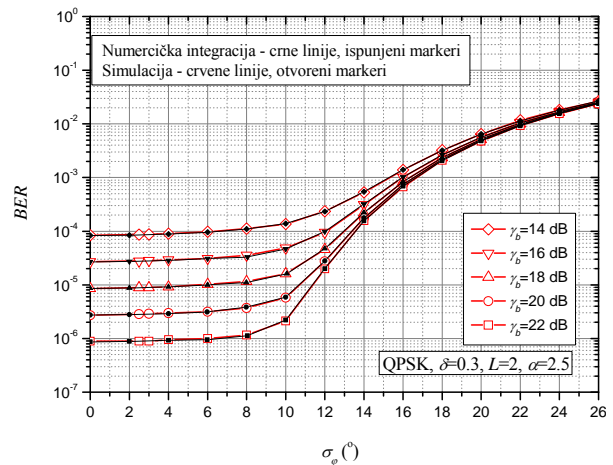
Na Sl. 5 prikazan je uticaj parametra Weibullovog fedinga na vrednosti verovatnoće greške po bitu pri detekciji QPSK signala. Treba uočiti da vrednosti neotklonjive greške, koja se javlja zbog neidealne ekstrakcije referentnog nosioca, u izvesnoj meri zavise od parametra fedinga. Da bi se postigla BER od  $10^{-5}$ , ako je  $\alpha=4$  potrebno je da bude  $\gamma_b=12.5$  dB, dok je za slučaj  $\alpha=2$  (dublji feding nego u prethodnom slučaju) potrebna vrednost  $\gamma_b=20.5$  dB.

Na Sl. 6 prikazan je uticaj broja prijernih antena na performanse prijemnika. Najveći dobitak se postiže kada se broj grana poveća sa jedan na dva, dok su dobitci manji sa daljim povećanjem broja grana. BER od  $10^{-5}$  nije moguće dostići sa manjim brojem prijernih antena od 4, jer se za diverziti prvog, drugog i trećeg reda javlja neotklonjiva greška veća od  $10^{-5}$ .

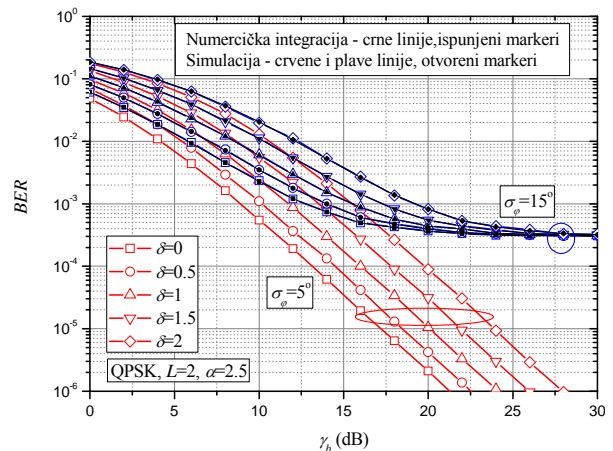
Postoji izuzetno dobro slaganje između numeričkih rezultata dobijenih numeričkom integracijom i rezultata dobijenih Monte Carlo simulacijama, jer u simulacijama su korišćeni strogi kriterijumi za procenu bilo koje vrednosti BERa, što je objašnjeno u prethodnom delu teksta.



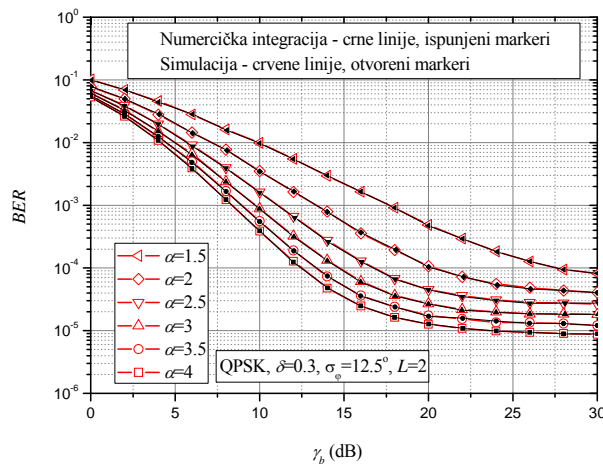
Sl. 2. Zavisnost verovatnoće greške po bitu od odnosa srednjih snaga signala i šuma po bitu za različite vrednosti standardne devijacije fazne greške



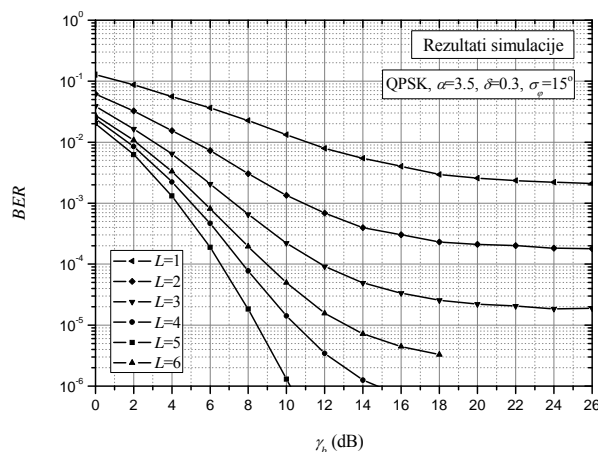
Sl. 3. Zavisnost verovatnoće greške po bitu od standardne devijacije fazne greške za različite vrednosti odnosa srednjih snaga signala i šuma po bitu



Sl. 4. Zavisnost verovatnoće greške od odnosa srednjih snaga signala i šuma po bitu za različite vrednosti faktora nebalansiranosti



Sl. 5. Zavisnost verovatnoće greške po bitu od odnosa srednjih snaga signala i šuma po bitu za različite vrednosti parametra Weibullovog fedinga



Sl. 6. Zavisnost verovatnoće greške po bitu od odnosa srednjih snaga signala i šuma po bitu za različite vrednosti reda diverziteti prijemnika

#### IV. ZAKLJUČAK

U radu je uspostavljena veza između standardne devijacije fazne greške i verovatnoće greške po bitu u MRC prijemniku sa nebalansiranim granama pri detekciji QPSK signala koji se prostiru kroz kanal sa Weibullovim fedingom. Korišćenjem postupka predloženog u radu i prikazanih rezultata, moguće je proračunati potrebnu vrednost standardne devijacije faznog šuma iz uslova da prethodno zadata verovatnoća greške po bitu ne bude premašena. Na osnovu toga moguće je optimizirati kolo za procenu faze dolazećeg signala tako da ova proračunata vrednost standardne devijacije fazne greške ne bude premašena.

Pokazano je da slučajne promene fazne greške prouzrokuju pojavu neotklonjive greške (Sl. 2 i 3). Utvrđeno je da vrednosti standardne devijacije fazne greške u znatnoj meri utiču na vrednosti ove neotklonjive greške. Rezultati na Sl. 3 pokazuju u kojoj meri je detekcija QPSK signala osetljiva na uticaj neidealne procene faze dolazećeg signala. Kao što je već rečeno, vrednosti BERa su približno iste sve do oko  $\sigma_{\varphi}=8^{\circ}$ . Ilustrovano je u kom opsegu vrednosti odnosa srednjih snaga signala i šuma, debalansiranost prijemnika igra

važnu ulogu (Sl. 4). Pokazano je u kojoj meri dubina fedinga, u kombinaciji sa neidealnom procenom faze, utiče na vrednosti verovatnoće greške po bitu (Sl. 5). Rezultati na Sl. 6 omogućavaju da se nađe kompromis između kvaliteta prenosa (vrednosti BERa) i složenosti sistema (broj grana primenika).

#### ZAHVALNICA

Rad je delimično finansiran sredstvima Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, u okviru projekta "Razvoj i realizacija nove generacije softvera, hardvera i usluga na bazi softverskog radija za namenske aplikacije", Ev. br. 11030.

#### LITERATURA

- [1] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, 2<sup>nd</sup> ed. New York: Wiley, 2005.
- [2] V. Aalo, S. Pattaramalai, "Average error rate for coherent MPSK signals in Nakagami fading channels", *Electronics Letters*, Vol. 32, Issue 17, pp. 1538 - 1539, August, 1996.
- [3] G. K. Karagiannidis, D. A. Zogas, N. C. Sagias, S. A. Kotsopoulos, and G. S. Tombras, "Equal gain and maximal ratio combining over Weibull fading channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 4, No. 3, pp. 841-846, May 2005.
- [4] M. A. Najib, V. K. Prabhu, "Analysis of equal-gain diversity with partially coherent fading signals," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol. 49, No. 3, pp. 783-791, May 2000.
- [5] N. C. Sagias, G. K. Karagiannidis, "Effects of carrier phase error on EGC receivers in correlated Nakagami-m fading," *IEEE Communications Letters*, Vol. 9, No. 7, pp. 580-582, July 2005.
- [6] X. Dong, N. C. Beaulieu, Average level crossing rate and average fade duration of low-order maximal ratio diversity with unbalanced channels, *IEEE Communications Letters*, Vol. 6, No. 4, pp. 135-137, April 2002.
- [7] W. C. Lindsey, M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [8] F. Babich and G. Lombardi, "Statistical analysis and characterization of the indoor propagation channel," *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 48, pp. 455-464, March 2000.
- [9] G. Tzeremes and C.G.Christodoulou, "Use of Weibull distribution for describing outdoor multipath fading," *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Vol. 1, pp. 232-235, 2002.
- [10] N. C. Sagias and G. K. Karagiannidis, "Gaussian class multivariate Weibull distributions: theory and applications in fading channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51, No. 10, pp. 3608-3619, October 2005.
- [11] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6<sup>th</sup> ed., New York: Academic, 2000.

#### ABSTRACT

This paper presents an analysis of maximum ratio combining (MRC) receiver of quaternary phase-shift keying (QPSK) signals transmitted over a Weibull fading channel. We determine the influence of imperfect co-phasing and branches unbalance on bit error rate dependence on average signal-to-noise ratio. The performance dependence on diversity order and fading severity is also observed.

#### INFLUENCE OF IMPERFECT COPHASING ON PERFORMANCE OF MRC RECEIVER OF QPSK SIGNALS TRANSMITTED OVER WEIBULL FADING CHANNEL

Goran T. Đorđević, Bojana Z. Nikolić,  
Aleksandra M. Cvetković, Milan S. Marković