Hi kvadrat distribucija - drugostepena ograničenja

Zoran Popović, Hana Stefanović, Dejan Blagojević i Dimitrije Stefanović

Sadržaj — **Zbog važnosti Hi-kvadrat distribucije u teoriji telekomunikacija, razmatranje i analiza njenih karakeristika bi bilo korisno. Ovaj rad se odnosi na uprošćen model razmatranja funkcije gustine verovatnoće, kroz obvojnicu koja obuhvata sve familije krivih po parametru. Postoje familije krivih i njihova obvojnica egzistira kao partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina. Egzistencija partikularnih rešenja je razmotrena, a funkcije obvojnica su izračunate. Takođe, grafici familija krivih i njihovih obvojnica su prikazani.**

Ključne reči — **Aproksimacija, Hi kvadrat distribucija, funkcija gustine verovatnoće, Rejlijeva distribucija, slučajna promenljiva, SIR.**

I. Uvod

Uslovi propagacije signala kroz prostor izazivaju varijacije signala na ulazu prijemnika, tako da u pojedinim trenucima dolazi do delimičnog, pa i do potpunog iščezavanja korisnog signala. Sem varijabilnosti anvelope od značaja su i promene faze signala, što zajedno utiče na performanse telekomunikacionih sistema [1]-[4]. Takođe, prenos u bežičnim telekomunikacijama karakterišu različite vrste fedinga i predstavljaju jednu od dominantnih smetnji i ograničenja. Da verovatnoća greške u kanalu sa fedingom bude što manja ili što bliža nekoj zadatoj vrednosti, ne znači da je dovoljno povećati snagu predajnika, a u tom smislu se koriste različita sistemska rešenja i tehnike (diverziti prenos, prenos sa povratnim kanalom, adaptivni prenos, korišćenje zaštitnih kodova, itd.).

Kao primer, navodimo sistem koji koristi prošireni spektar FH-DPSK , koji je u stanju da mobilnim radio-mrežama obezbedi uslove za opsluživanje velikog broja korisnika u urbanim sredinama. FH-DPSK signal je sinusoidalan, konstantne anvelope i kontinualne faze podeljene u diskretne vremenske intervale – odlomke ili čipove, čije je vreme trajanja t_1. U jednoj periodi T se nalazi L čipova, odnosno različitih frekvencija koje se koriste za opsuživanje korisnika. Dodeljivanje frekvencija se obavlja po formi:

$$f_i^k = f_c + \alpha_i^k \cdot f_1$$

gde f_i^k predstavlja frekvenciju pomerenu u odnosu na noseću frekvenciju f_c, α_i^k predstavlja prirodan broj sa k-tim kodom kodnog skupa od i=1,2,...,L elemenata, a f_1 osnovnu frekvenciju posle deljenja spektra. Na ovaj način se dobija L različitih kanala određenog frekventnog opsega, spremnih za korišćenje. Zbog ne savršenosti primo-predajnika i ambijentalnih uslova dolazi do smetnji, odnosno međusobnog ometanja kanala. Ako korisni i interferirajući signali imaju iste noseće frekvencije dolazi do interkanalne interference. Ona pogoršava performanse sistema, a može biti izazvana namernim ili slučajnim ometanjem.

U sistemima mobilne telefonije visokog kapaciteta, koji koriste ćelijsku strukturu mreže baznih stanica, između susednih ćelija često dolazi do interference, dok je verovatnoća da se to desi između ne susednih daleko manja, zbog velikog slabljenja signala na većim udaljenostima. S tim u vezi, najgori slučaj interference se javlja kada neka od mobilnih stanica dođe u poziciju da bude podjednako udaljena od tri bazne stanice – na mestu tzv. čvora ćelijske mreže. Tada, su interferirajući signali jednako udaljeni od mobilne jedinice, a jačina signala uslovljena pravilima propagacije.

Ako je ukupna snaga P_t i snaga i-ćelije Y_i preneta sa njene bazne stanice do mobilne jedinice, onda se deljenjem ukupne snage P_t zbirom doprinosa svake od N-1 ćelija, koje utiču na interferenciju, dobija se odnos signala prema interferenciji SIR ćelije bazne stanice. Ako svaka ćelija ima M korisnika (M>>1), to se SIR za jednu mobilnu jedinicu na svakom prilagođenom filtru na izlazu može izraziti kao

$$\hat{\gamma}_f = \frac{P_t}{M \sum_{i=1}^{N-1} P_{Y_i}}$$

Za nas je značajan prosečan SIR na izlazu linearnog kombinera na osnovu koga procenjujemo efikasnost sistema. Na njega utiče N ćelija, a svaka opslužuje maksimalnih M korisnika. Pod pretpostavkom da ima L-1 nezavisna putanja po kojima prilikom detekcije date reči može doći do greške, procenjujemo i verovatnoću otkaza na izlazu sistema.

Z. J. Popović, Tehnički fakultet u Čačku, Srbija (telefon: 381-65-3301550; faks: 381-32-330155; e-mail: pop@tfc.kg.ac.yu).

H. Z. Stefanović, Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu, 11000 Beograd, Srbija; (e-mail: hanap@eunet.yu).

D. R. Blagojević, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: vule@elfak.ni.ac.yu).

D. Č. Stefanović, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: vule@elfak.ni.ac.yu).

II. MODEL SA REJLIJEVIM FEDINGOM

U okruženju sa fedingom po više putanja, možemo pretpostaviti da individualni signali slabe. Međutim, suma svih interferirajućih signala ne slabi zbog efekta uprosečavanja. Prema tome, na izlazu i-tog prilagođenog filtra linearnog kombinera imamo

$$\upsilon_j(t) = r_j(t) \cdot A \cdot \sin\left[\omega_i t + \Phi_i(t)\right] + \\ + I_{s,i}(t)\sin(\omega_i t) + I_{c,i}(t)\cos(\omega_i t)$$

gde je $r_j(t)$ slučajna promenljiva $p(r_j) = 2 \cdot r_j \cdot \exp(-r_j^2)$ sa Rejlijevom distribucijom.

Kada postoji feding, slučajna promenljiva R biće zbir kvadrata statistički nezavisnih L slučajnih promenljivih Rejlijeve raspodele

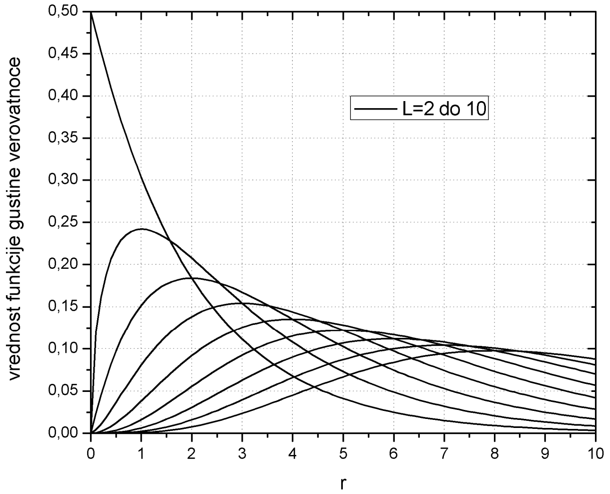
$$R = \sum_{j=1}^{L} r_j^2(t)$$

a pri propagaciji bez fedinga je R=1/2.

Slučajna promenljiva R ima Hi-kvadrat raspodelu tako da je, dalje, od interesa detaljnija analiza Hi-kvadrat raspodele čiji je stepen slobode 2L, odnosno L jer posmatramo opširniji slučaj

$$p_R(r) = \frac{2^{-\frac{L}{2}} r^{-1+\frac{L}{2}}}{\Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} e^{-\frac{r}{2}}, r \geq 0 \qquad (1)$$

Grafički prikaz Hi-kvadrat funkcije gustine raspodele, opšte poznat u literaturi, kada je stepen slobode L nezavisni parametar, a r promenljiva dat je na sl. 1. Za granični slučaj, kad je L=2 dobijamo eksponencijalnu krivu $p_R(r|L=2) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot r), \lambda = 0.5$.



Sl. 1. Funkcija gustine verovatnoće Hi-kvadrat raspodele u zavisnosti od r za vrednosti L=2 do 10 .

III. ANALIZA OSOBINA FUNKCIJE GUSTINE RASPODELE

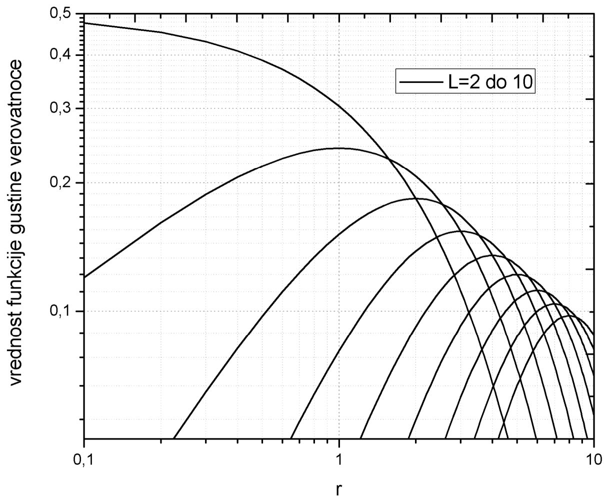
U ovom radu se nećemo baviti opšte poznatim pokazateljima raspodele, pa ni analizom metodom najmanjih kvadrata. Sistem diferencijalnih jednačina od kojih polazi i metoda najmanjih kvadrata je

$$\frac{d\left(p_R(L,r)\right)}{dx} = 0 \text{ i } \frac{d\left(p_R(L,r)\right)}{dL} = 0 \qquad (2)$$

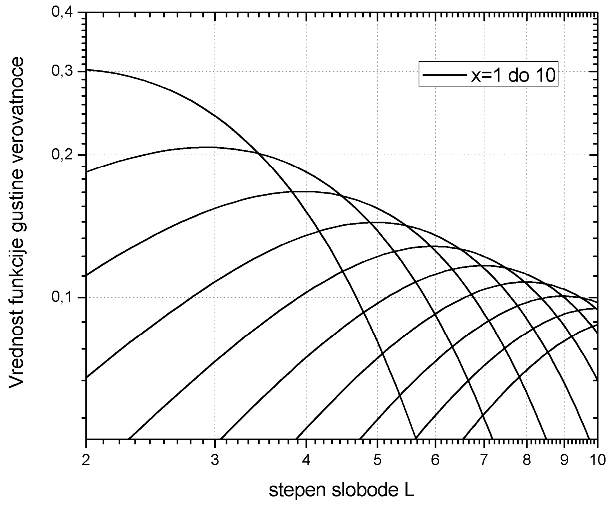
i dobijamo tačke maksimuma funkcije gustine verovatnoće kada se u jednom slučaju stepen slobode L, a u drugom slučaju r posmatra kao nezavisni parametar. U prvom slučaju su maksimumi u tačkama r=L-2, dok je to u drugom slučaju (nešto komplikovanije) u tačkama L≈r+1. Odnosno,

$$p_R^{\max}(L|r = L-2) \text{ i } p_R^{\max}(r|L \approx r+1) \qquad (3)$$

Maksimumi funkcije jesu veoma deskriptivan parametar za analizu. Ipak mi ćemo se baviti nešto širim modelom, koji apsolutno obuhvata sve krive familije po jednom od ova dva parametra. Na slikama 2. i 3. su logaritamsko-logaritamski prikazi familija krivih; u prvom slučaju kada je L nezavisni parametar i u drugom slučaju kada je r nezavisni parametar.



Sl. 2. Log-Log prikaz funkcija gustine verovatnoće u zavisnosti od r za vrednosti parametra L=2 do 10 .

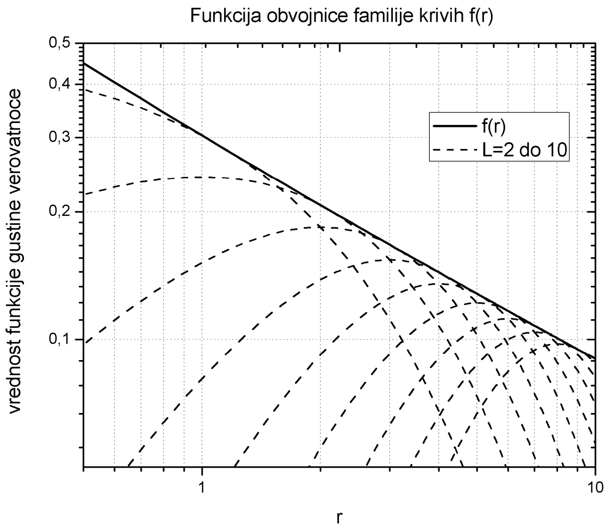


Sl. 3. Log-Log prikaz funkcije gustine verovatnoće u zavisnosti od L za vrednosti parametra r=1 do 10 .

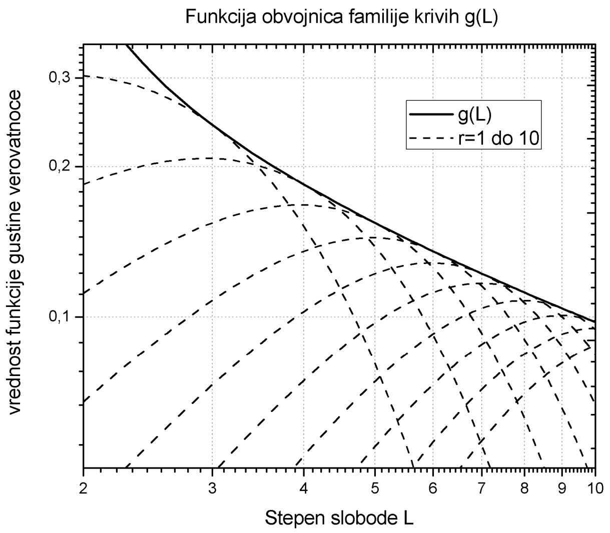
Očigledno je da postoji kriva, koju nazivamo obvojnicom familije krivih, koja isključuje mogućnost da za neku vrednost promenljive, funkcija gustine verovatnoće ima veću vrednost od vrednosti funkcije obvojnice za istu tu vrednost. Odnosno, ako su f(r) i g(L) funkcije obvojnica ove dve familije krivih, onda je

$$f(r) \geq p_R(r|L) \;\; \text{i} \;\; g(L) \geq p_R(L|r) \tag{4}$$

Tačnije, kriva funkcije obvojnice tangira svaku od krivih iz familije po nezavisnim parametrima. To nam prikazuju slike 4. i 5.



Sl. 4. Log-Log prikaz funkcija obvojnice familije krivih kada se stepen slobode L posmatra kao parametar



Sl. 5. Log-Log prikaz funkcija obvojnice familije krivih kada se r posmatra kao parametar

Takođe se vidi da tačke maksimuma iz druge familije krivih pripadaju i funkciji obvojnice prve familije krivih, a u obrnutom se preslikavaju u tačke pomerene za 1. To je specifičnost koju koristimo da izračunamo izraze funkcija obvojnica.

Odgovarajućim zamenama iz (3) i (4) u funkciji gustine verovatnoće (1), pa aproksimiranjem po modelu iz dodatka (9) dobijamo

$$f(r) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{r}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

i

$$g(L) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{L-2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Zatim, numeričkim fitovanjem dobijamo funkcije obvojnica

$$f(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(r-0.13)}} \tag{7}$$

i

$$g(L) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(L-1.636)}} \tag{8}$$

IV. Zaključak

U slučaju da imamo komplikovana izračunavanja, u kojima nam je potrebna Hi-kvadrat funkcija gustine verovatnoće, za koje ne možemo dobiti izraze u zatvorenoj formi, možemo koristiti osobine funkcije obvojnice. U zavisnost od toga šta nam je parametarska vrednost, a šta promenljiva, dobijamo uprošćen mehanizam za izračunavanja.

Dodatak

U proračunima koristimo aproksimaciju za funkciju sledećeg oblika

$$\frac{e^{-x}x^{x}}{\Gamma(x+1)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Literatura

[1] W. C. Y. Lee, "Mobile Communications Engineering: Theory and applications," New York: McGraw-Hill, 1998.

[2] J. G. Proakis, "Digital Communications," New York: McGraw-Hill, 2000.

[3] G. Lukatela, "Statistička teorija telekomunikacija i teorija informacija," Beograd: Građevinska knjiga, 1981.

[4] D. Drajić, "Uvod u statističku teorija telekomunikacija ," Beograd: Akademska misao, 2003.

[5] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables," Washington: U.S. Government printing office, 1972.

[6] Z. Popović i D. Stefanović, "A some integral properities of Chi square distribution from the viewpoint of its application in telecommunication systems," *INFOTEH-Jahorina Vol.7, ref. B-I-9, p.89-92, March 2008.*

THE CHI SQUARE DISTRIBUTION - THE SECONDARY LIMITATIONS

Z. J. Popovic, H. Z. Stefanovic, D. R. Blagojevic, and D. C. Stefanovic

***Abstract* — Considering importance of the Chi-square distribution at the telecommunication theory, observing and analyzing its properties should be very useful. This work refers to the simplified model of consideration the probability density function as the envelope of overall curves family. There are the curves families and theirs the envelopes exists as particular solutions of the system of differential equations. The existance of singular solution is considered and the envelopes functions obtained in closed-form. In addition the graphics representation are displayed.**